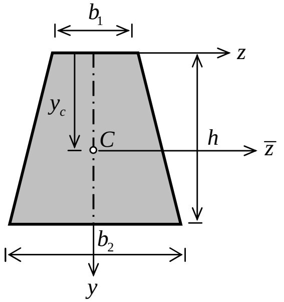
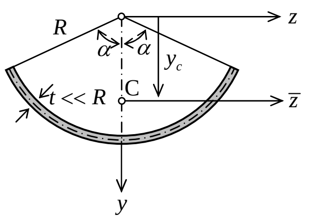
1. Määritä integroimalla oheisen poikkileikkauksen pinta-ala A, staattinen momentti S_z ja jäyhyysmomentti I_z $z-$akselin suhteen sekä pintakeskiön C asema y_C. Määritä sitten Steinerin sääntöä käyttäen jäyhyysmomentti $I_{\bar{z}}$ pintakeskiön kautta kulkevan $\bar{z}-$akselin pintakeskiökoordinaatistossa. *Osittainen vastaus:*

$$y_c = \frac{h}{3}\frac{b_1+2b_2}{b_1+b_2},\ I_{\bar{z}} = \frac{h^3}{36}\frac{b_1^2+4b_1b_2+b_2^2}{b_1+b_2}$$

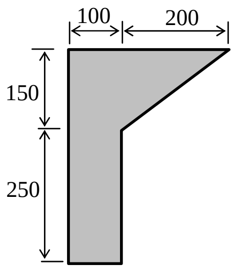


2. Määritä integroimalla oheisen poikkileikkauksen pinta-ala A, staattinen momentti S_z ja jäyhyysmomentit I_y ja I_z kuvan $y,z-$koordinaatistossa sekä pintakeskiön C asema y_C. Määritä sitten jäyhyysmomentit $I_{\bar{y}}$ ja $I_{\bar{z}}$ pintakeskiökoordinaatistossa $\bar{y},\bar{z}$. *Osittainen vastaus:*

$$y_c = \frac{\sin\alpha}{\alpha}R\ \ I_{\bar{y}} = R^3t(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2})\ \ I_{\bar{z}} = R^3t(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} - 2\frac{\sin^2\alpha}{\alpha})$$



3. Määritä oheisen poikkileikkauksen pääjäyhyysmomentit ja niiden suuntakulmat pintakeskiökoordinaatistossa. Mitat ovat millimetrejä.
Vastaus: $I_1 = 8,61\cdot 10^8\ \text{mm}^4$, $I_2 = 1,51\cdot 10^8\ \text{mm}^4$, $\alpha_1 = -17,5°$, $\alpha_2 = 72,5°$.

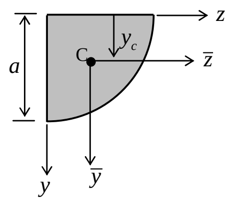


Harjoitus 6 Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi

Palautettavat kotitehtävät

Palautus **pe 9.11 klo 16.00 mennessä** Nopassa olevien ohjeiden mukaisesti.

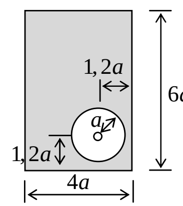
I. Määritä integroimalla oheisen neljännesympyrän muotoisen poikkileikkauksen staattinen momentti S_z, jäyhyysmomentti I_z ja tulomomentti I_{yz} kuvan $y,z-$koordinaatistossa sekä pintakeskiön asema y_c. Määritä sitten Steinerin sääntöä käyttäen jäyhyysmomentti $I_{\bar{z}}$ ja tulomomentti $I_{\bar{y}\bar{z}}$ pintakeskiö-koordinaatistossa $\bar{y}\bar{z}$.



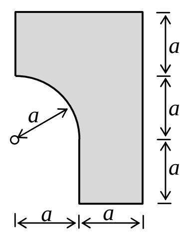
Ohje: Suorita integrointi napakoordinaatistossa r,ϕ, jossa ϕ on $y-$akselin ja säteen r välinen kulma sekä pinta-alkio on $dA = r dr d\phi$. Voit käyttää hyväksesi seuraavia integrointikaavoja

$$\int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} \text{ ja } \int \sin ax \cos ax\,dx = \frac{\sin^2 ax}{2a}.$$

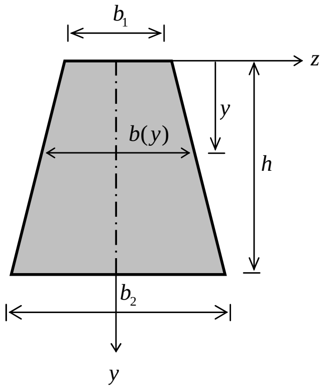
II. Määritä oheisen poikkileikkauksen jäyhyysmomentit ja tulomomentti pintakeskiö-koordinaatistossa.



III. Määritä oheisen poikkileikkauksen jäyhyysmomentit ja tulomomentti pintakeskiökoordinaatistossa sekä pääjäyhyysmomentit ja niiden suuntakulmat. Piirrä myös kuva, jossa on poikkileikkaus ja sen pintakeskiöön asetetut pääakselit.



1.



Poikkileikkauksen leveys:

Koska leveys kasvaa lineaarisesti, se on muotoa

$$b(y) = a_0 + a_1 y\,.$$

Soveltamalla ehtoja ylä- ja alareunoissa saadaan

$$\left.\begin{array}{l} b(0) \equiv a_0 = b_1 \\ b(h) \equiv a_0 + a_1 h = b_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_0 = b_1 \\ a_1 = \dfrac{b_2 - b_1}{h} \end{array}\right.$$

joten

$$b(y) = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{h} y\,.$$

Pinta-ala, staattinen momentti ja jäyhyysmomentti z – akselin suhteen:

$$A = \int_0^h b(y)dy = \int_0^h (b_1 + \frac{b_2 - b_1}{h} y)dy = \Big|_0^h (b_1 y + \frac{b_2 - b_1}{2h} y^2) = b_1 h + \frac{b_2 - b_1}{2} h = \frac{b_1 + b_2}{2} h$$

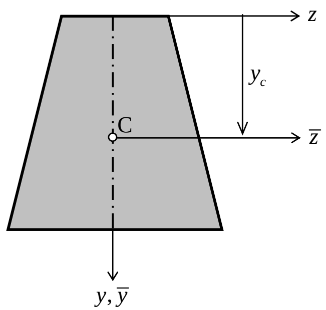
$$S_z = \int_0^h y b(y)dy = \int_0^h (b_1 y + \frac{b_2 - b_1}{h} y^2)dy = \Big|_0^h (\frac{b_1}{2} y^2 + \frac{b_2 - b_1}{3h} y^3) = \frac{b_1}{2} h^2 + \frac{b_2 - b_1}{3} h^2 = \frac{b_1 + 2b_2}{6} h^2$$

$$I_z = \int_0^h y^2 b(y)dy = \int_0^h (b_1 y^2 + \frac{b_2 - b_1}{h} y^3)dy = \Big|_0^h (\frac{b_1}{3} y^3 + \frac{b_2 - b_1}{4h} y^4) = \frac{b_1}{3} h^3 + \frac{b_2 - b_1}{4} h^3 = \frac{b_1 + 3b_2}{12} h^3$$

Pintakeskiön y – koordinaatti:

$$y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{\frac{b_1 + 2b_2}{6} h^2}{\frac{b_1 + b_2}{2} h} = \underline{\frac{h}{3} \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2}}$$

Jäyhyysmomentti pintakeskiön C kautta kulkevian $\bar{z}$ – akselien suhteen:



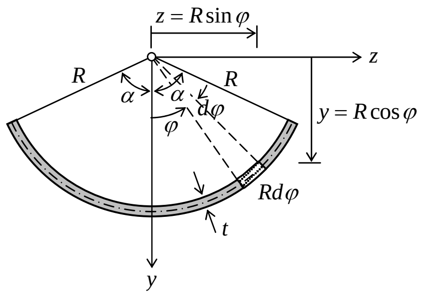
Steinerin sääntö:

$$I_z = I_{\bar{z}} + A y_C^2 \;\Rightarrow$$

$$I_{\bar{z}} = I_z - A y_C^2 = \frac{b_1 + 3b_2}{12} h^3 - \frac{b_1 + b_2}{2} h \cdot (\frac{h}{3} \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2})^2$$

$$= \underline{\underline{\frac{h^3}{36} \frac{b_1^2 + 4b_1 b_2 + b_2^2}{b_1 + b_2}}}$$

2.



Pintakeskiön $y-$koordinaatti:

$$A = \int_{-\alpha}^{\alpha} tRd\varphi = Rt\int_{-\alpha}^{\alpha} d\varphi = Rt\Big|_{-\alpha}^{\alpha}\varphi = \underline{2Rt\alpha}$$

$$S_z = \int_{-\alpha}^{\alpha} ytRd\varphi = \int_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\varphi tRd\varphi = R^2 t\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi d\varphi = R^2 t\Big|_{-\alpha}^{\alpha}\sin\varphi = 2R^2 t\sin\alpha$$

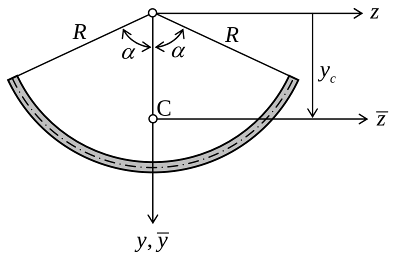
$$y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{2R^2 t\sin\alpha}{2Rt\alpha} = \underline{\frac{\sin\alpha}{\alpha}R}$$

Jäyhyysmomentit $z-$ ja $y-$akselien suhteen:

$$I_z = \int_{-\alpha}^{\alpha} y^2 tRd\varphi = \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2\cos^2\varphi tRd\varphi = R^3 t\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos^2\varphi d\varphi = R^3 t\Big|_{-\alpha}^{\alpha}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right) = \underline{R^3 t\left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}\right)}$$

$$I_y = \int_{-\alpha}^{\alpha} z^2 tRd\varphi = \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2\sin^2\varphi tRd\varphi = R^3 t\int_{-\alpha}^{\alpha}\sin^2\varphi d\varphi = R^3 t\Big|_{-\alpha}^{\alpha}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4}\right) = \underline{R^3 t\left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}\right)}$$

Jäyhyysmomentit pintakeskiön C kautta kulkevien $\bar{z}-$ ja $\bar{y}-$akselien suhteen:



$$I_z = I_{\bar{z}} + Ay_c^2 \quad\Rightarrow$$

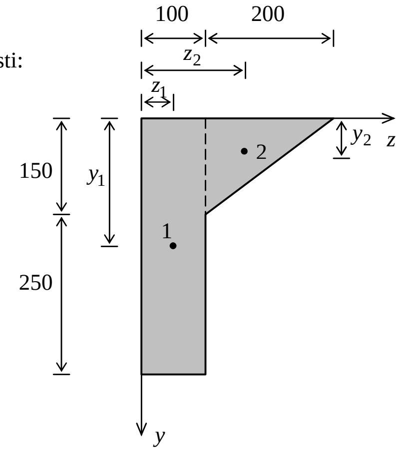
$$I_{\bar{z}} = I_z - Ay_c^2 = R^3 t\left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}\right) - 2Rt\alpha\cdot\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}R\right)^2 = \underline{\underline{R^3 t\left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} - 2\frac{\sin^2\alpha}{\alpha}\right)}}$$

$$I_{\bar{y}} = I_y = \underline{\underline{R^3 t\left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}\right)}}$$

Harjoitus 6 Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi
Ratkaisut

3.

Pintakeskiön asema:



Asetetaan y,z-koordinaatisto kuvan mukaisesti:

Pinta-alat:

$$A_1 = 100\cdot 400\ \text{mm}^2 = 40000\ \text{mm}^2,$$
$$A_2 = \frac{1}{2}\cdot 150\cdot 200\ \text{mm}^2 = 15000\ \text{mm}^2,$$
$$A = A_1 + A_2 = 55000\ \text{mm}^2$$

Osapintojen pintakeskiöiden koordinaatit:

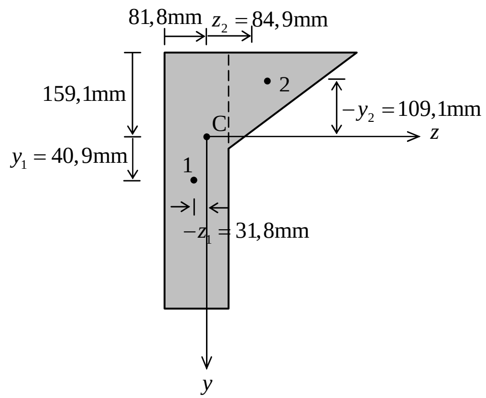
$$y_1 = 200\ \text{mm},\quad z_1 = 50\ \text{mm},$$
$$y_2 = 50\ \text{mm},\quad z_2 = 166{,}7\ \text{mm}$$

Pintakeskiön koordinaatit:

$$y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A} = \frac{40000\cdot 200 + 15000\cdot 50}{55000} = 159{,}1\ \text{mm}$$
$$z_C = \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2}{A} = \frac{40000\cdot 50 + 15000\cdot 166{,}7}{55000} = 81{,}8\ \text{mm}$$

Jäyhyysmomentit ja tulomomentti pintakeskiökoordinaatistossa:

Asetetaan $y, z-$koordinaatisto pintakeskiöön C:



$$I_z = I_{\bar{z}1} + A_1 y_1^2 + I_{\bar{z}2} + A_2 y_2^2$$
$$= \frac{100 \cdot 400^3}{12} + 40000 \cdot 40,9^2 + \frac{200 \cdot 150^3}{36} + 15000 \cdot (-109,1)^2 = \underline{\underline{7,97 \cdot 10^8 \text{mm}^4}}$$

$$I_y = I_{\bar{y}1} + A_1 z_1^2 + I_{\bar{y}2} + A_2 z_2^2$$
$$= \frac{400 \cdot 100^3}{12} + 40000 \cdot (-31,8)^2 + \frac{200^3 \cdot 150}{36} + 15000 \cdot 84,9^2 = \underline{\underline{2,15 \cdot 10^8 \text{mm}^4}}$$

$$I_{yz} = I_{\bar{y}\bar{z}1} + A_1 y_1 z_1 + I_{\bar{x}\bar{y}2} + A_2 y_2 z_2$$
$$= 0 + 40000 \cdot 40,9 \cdot (-31,8) - \frac{200^2 \cdot 150^2}{72} + 15000 \cdot (-109,1) \cdot 84,9 = \underline{\underline{-2,03 \cdot 10^8 \text{ mm}^4}}$$

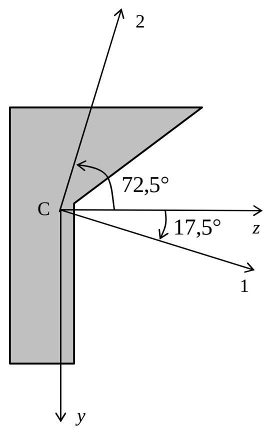
<u>Pääjäyhyysmomentit:</u>

$$I_{1,2} = \frac{1}{2}(I_z + I_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (7,97 + 2,15) \cdot 10^8 \text{mm}^4 \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{((7,97 - 2,15) \cdot 10^8 \text{mm}^4)^2 + 4 \cdot (-2,03 \cdot 10^8 \text{mm}^4)^2}$$
$$= 5,0625 \cdot 10^8 \text{mm}^4 \pm 3,552 \cdot 10^8 \text{mm}^4$$

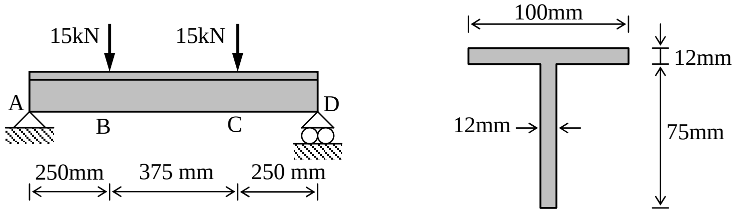
$$I_1 = (5,06 + 3,55) \cdot 10^8 \text{ mm}^4 = \underline{\underline{8,61 \cdot 10^8 \text{ mm}^4}},$$
$$I_2 = (5,06 - 3,55) \cdot 10^8 \text{ mm}^4 = \underline{\underline{1,51 \cdot 10^8 \text{ mm}^4}}.$$

<u>Suuntakulmat:</u>

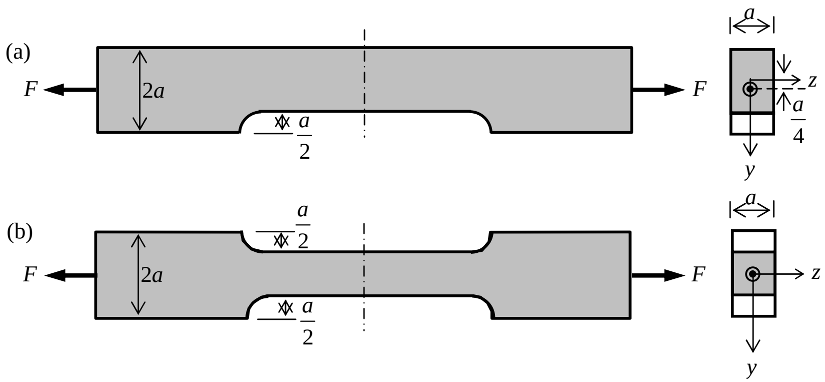
$$\alpha_1 = \arctan \frac{I_1 - I_z}{I_{zy}} = \arctan(-0,315) = -17,5°,$$
$$\alpha_2 = \arctan \frac{I_2 - I_z}{I_{zy}} = \arctan(3,18) = 72,5°.$$



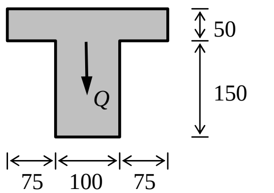
1. Oheista palkkia, jolla on T-poikkileikkaus, kuormittaa kaksi pistekuormaa oheisen kuvan osoittamalla tavalla. Määritä palkin suurimman ja pienimmän normaalijännityksen arvot. *Vastaus:* $\sigma_{\max} = 165{,}9\,\mathrm{N/mm^2}$, $\sigma_{\min} = -65{,}6\,\mathrm{N/mm^2}$.



2. Määritä paljonko sauvan (a) poikkileikkauksen suurin jännitys on suurempi kuin sauvan (b) jännitys. *Vastaus:* 33,3%.



3. Oheista palkkia, jolla on T-poikkileikkaus, kuormittaa leikkausvoima $Q = 50$ kN. Määritä leikkausjännityksen τ_{xy} poikkileikkauksessa ja leikkausjännityksen suurin arvo. *Osittainen vastaus:* $\tau_{xy,\max} = 3{,}67\,\mathrm{MPa}$



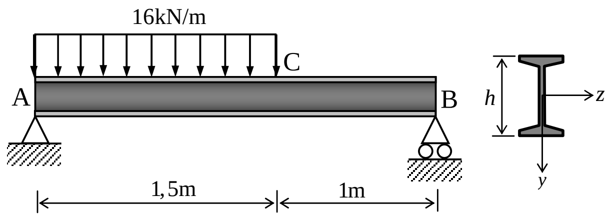
Mitat millimetreinä.

Harjoitus 7 Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi

Palautettavat kotitehtävät

Palautus **pe 16.11 klo 16.00 mennessä** Nopassa olevien ohjeiden mukaisesti.

I. Määritä oheisen palkin suurin normaalijännitys.

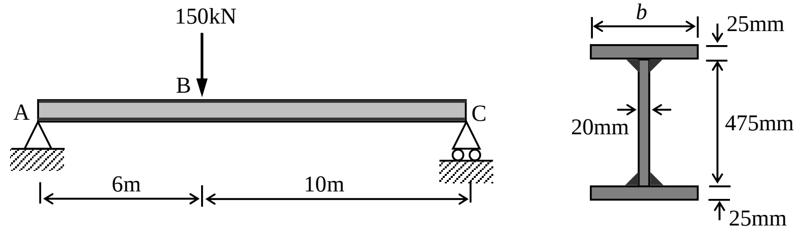


$I_y = 0{,}782\cdot10^6\,\mathrm{mm^4}$

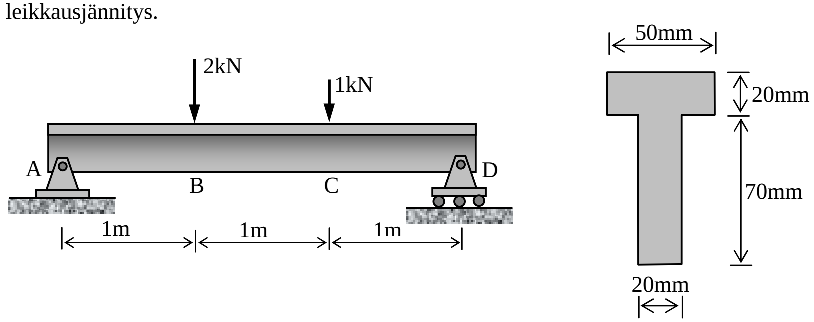
$I_z = 9{,}11\cdot10^6\,\mathrm{mm^4}$

$h = 152\,\mathrm{mm}$

II. Oheinen palkki on muodostettu hitsaamalla kolmesta levystä. Määritä pienin laipan leveys b jota voidaan käyttää, kun sallittu normaalijännitys poikkileikkauksessa on $\sigma_{\text{sall}} = 150\,\mathrm{MPa}$. Hitsin vaikutus poikkileikkauksen jäyhyysmomenttiin voidaan jättää huomiotta.

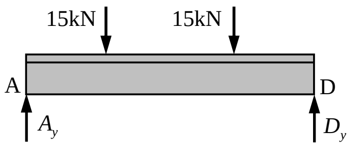


III. Määritä oheisen palkin kohdassa B vaikuttava itseisarvoiltaan suurin normaalijännitys sekä välillä AB vaikuttava itseisarvoltaan suurin leikkausjännitys.



1.

Tukireaktiot:



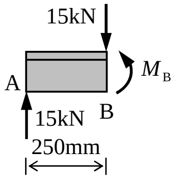
$D_y = A_y$ (symmetria)

$\uparrow \mathrm{A_y} + \overbrace{D_y}^{A_y} - 15\mathrm{kN} - 15\mathrm{kN} = 0$

$\Rightarrow \underline{A_y = D_y = 15\mathrm{kN}}$

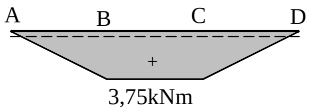
Taivutusmomentti:

Tuilla A ja B taivutusmomentti häviää ja pisteissä B ja C se on symmetrian vuoksi yhtä suuri. Näiden pisteiden välillä se on lineaarinen. Riittää siis laskea taivutusmomentinarvo pisteessä B.

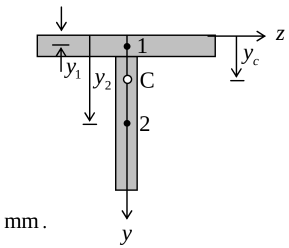


$\mathrm{B}\circlearrowleft M_B - 15\mathrm{kN}\cdot 250\mathrm{mm} = 0 \;\Rightarrow\; M_B = 3{,}75\mathrm{kNm}$

$M-$kuvio



Pintakeskiö:



$A_1 = 100\cdot 12 = 1200\mathrm{mm}^2$, $A_2 = 12\cdot 75 = 900\mathrm{mm}^2$,

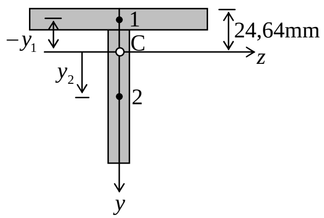
$A = A_1 + A_2 = 2100\mathrm{mm}^2$,

$y_1 = 12/2 = 6\mathrm{mm}$, $y_2 = 12 + 75/2 = 49{,}5\mathrm{mm}$.

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A} = \frac{1200\cdot 6 + 900\cdot 49{,}5}{2100}\mathrm{mm} = 24{,}64\ \mathrm{mm}.$$

Jäyhyysmomentti:

(Siirretään koordinaatisto pintakeskiöön C)



$y_1 = 6 - 24{,}64 = -18{,}64\mathrm{mm}$,

$y_2 = 49{,}5 - 24{,}64 = 24{,}86\mathrm{mm}$

Harjoitus 7 Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi
Ratkaisut

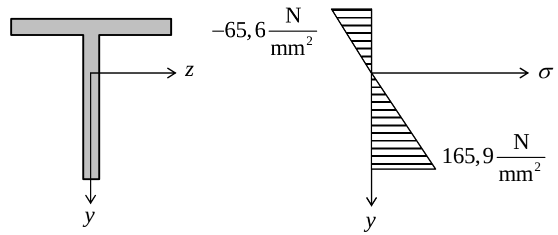
$$I \equiv I_z = I_{\bar{z}1} + A_1 y_1^2 + I_{\bar{z}2} + A_2 y_2^2$$
$$= \frac{100\cdot 12^3}{12} + 1200\cdot(-18{,}64)^2 + \frac{12\cdot 75^3}{12} + 900\cdot 24{,}86^2$$
$$= \underline{1{,}4094\cdot 10^6\,\mathrm{mm}^4}$$

Suurin normaalijännitys (veto) esiintyy poikkileikkauksen alareunassa ja pienin (puristus) poikkileikkauksen yläreunassa:

Huom: Kun tarkastellaan poikkileikkausta lujuusopin tehtävänä, poikkileikkauksen pintakeskiökoordinaatteja merkitään y ja z ilman yläviivoja.

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_z} y_{ala} = \frac{3{,}75\cdot 10^6\mathrm{Nmm}}{1{,}4094\cdot 10^6\mathrm{mm}^4}\cdot 62{,}36\ \mathrm{mm} = 165{,}9\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2},$$

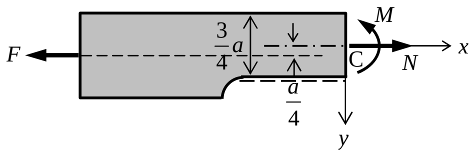
$$\sigma_{\min} = \frac{M}{I_z} y_{ylä} = \frac{3{,}75\cdot 10^6\mathrm{Nmm}}{1{,}4094\cdot 10^6\mathrm{mm}^4}\cdot(-24{,}64\ \mathrm{mm}) = -65{,}6\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}.$$



2.

Sauva (a):

Normaalivoima ja taivutusmomentti:



$$\rightarrow \quad N - F = 0 \;\Rightarrow\; N = F$$

$$\circlearrowleft C \quad M - F \cdot \frac{a}{4} = 0 \;\Rightarrow\; M = \frac{1}{4} Fa$$

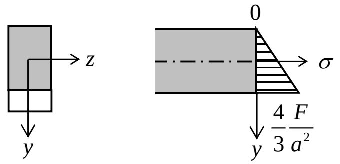
Poikkipinta-ala, jäyhyysmomentti ja taivutusvastus:

$$A = a \cdot \frac{3}{2} a = \frac{3}{2} a^2, \quad I = \frac{a \cdot (\frac{3}{2} a)^3}{12} = \frac{9}{32} a^4, \quad W = \frac{I}{\frac{3}{4} a} = \frac{\frac{9}{32} a^4}{\frac{3}{4} a} = \frac{3}{8} a^3$$

Reunajännitykset:

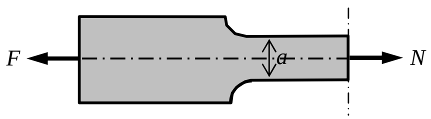
$$\sigma_{ylä} = \frac{N}{A} - \frac{M}{W} = \frac{F}{\frac{3}{2} a^2} - \frac{\frac{1}{4} Fa}{\frac{3}{8} a^3} = \underline{\underline{0}},$$

$$\sigma_{ala} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{F}{\frac{3}{2} a^2} + \frac{\frac{1}{4} Fa}{\frac{3}{8} a^3} = \underline{\underline{\frac{4}{3} \frac{F}{a^2}}}$$



Sauva (b):

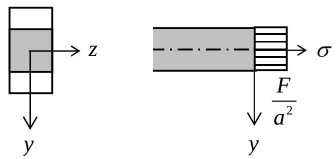
Normaalivoima:



$$\rightarrow \quad N - F = 0 \;\Rightarrow\; N = F$$

Poikkipinta-ala: $A = a \cdot a = a^2$

Normaalijännitys: $\sigma = \frac{N}{A} = \underline{\underline{\frac{F}{a^2}}}$



Vertailu:

$$\frac{\sigma_{\max}^{(a)}}{\sigma_{\max}^{(b)}} = \frac{\sigma_{ala}}{\sigma} = \frac{\frac{4}{3} \frac{F}{a^2}}{\frac{F}{a^2}} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

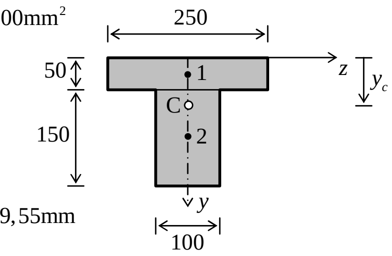
Sauvan (a) normaalijännitys on kolmanneksen eli noin 33% suurempi kuin sauvan (b).

3:

$$A_1 = 250 \cdot 50 = 12500\text{mm}^2, \; A_1 = 100 \cdot 150 = 15000\text{mm}^2$$

$$A = A_1 + A_2 = 27500\text{mm}^2$$

$$y_1 = 50/2 = 25\text{mm}, \; y_2 = 50 + 150/2 = 125\text{mm}$$



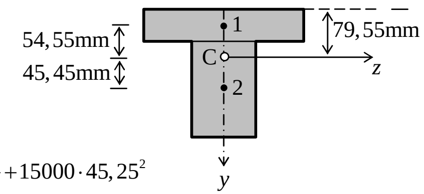
Pintakeskiön y-koordinaatti:

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A} = \frac{12500 \cdot 25 + 15000 \cdot 125}{27500} = 79{,}55\text{mm}$$

Jäyhyysmomentti:

$$y_1 = 25 - 79{,}55 = -54{,}55\text{mm}$$

$$y_2 = 125 - 79{,}55 = 45{,}45\text{mm}$$



$$I \equiv I_z = I_{\bar{z}1} + A_1 y_1^2 + I_{\bar{z}2} + A_2 y_2^2$$

$$= \frac{250 \cdot 50^3}{12} + 12500 \cdot (-54{,}55)^2 + \frac{100 \cdot 150^3}{12} + 15000 \cdot 45{,}25^2$$

$$= \underline{98{,}9 \cdot 10^6 \text{mm}}$$

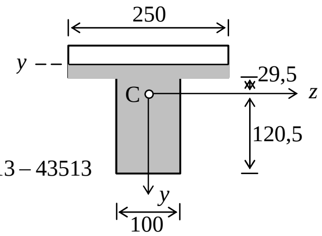
Osapoikkipinnan staattinen momentti:

Väli: $-79{,}5\text{mm} \le y \le -29{,}5\text{mm}$:

$$S_y(y) = \int_y^{y_{ala}} b(y) y dy = \int_y^{-29{,}5} 250 y dy + \int_{-29{,}5}^{120{,}5} 100 y dy$$

$$= \Big|_y^{-29{,}5} 125 y^2 + \Big|_{-29{,}5}^{120{,}5} 50 y^2 = 108781 - 125 y^2 + 726013 - 43513$$

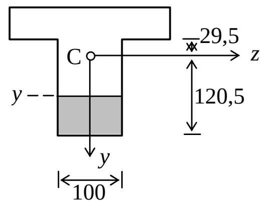
$$= \underline{791281 - 125 y^2}$$



Väli: $-29{,}5\text{mm} \le y \le 120{,}5\text{mm}$:

$$S_y(y) = \int_y^{y_{ala}} b(y) y dy = \int_y^{120{,}5} 100 y dy = \Big|_y^{120{,}5} 50 y^2$$

$$= \underline{726013 - 50 y^2}$$



Leikkausjännitys $\tau_{xy}(y)$:

Väli: $-79,5\text{mm} \le y < -29,5\text{mm}$:

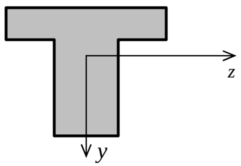
$$\tau_{xy}(y) = \frac{QS(y)}{Ib(y)} = \frac{50\cdot 10^3\,\text{N}\cdot(791281\text{mm}^3 - 125\text{mm}\cdot y^2)}{98,89\cdot 10^6\,\text{mm}^4\cdot 250\text{mm}} = \underline{1,600\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} - 0,000253\frac{\text{N}}{\text{mm}^4}y^2}$$

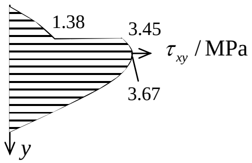
Väli: $-29,5\text{mm} < y \le 120,5\text{mm}$:

$$\tau_{xy}(y) = \frac{QS(y)}{Ib(y)} = \frac{50\cdot 10^3\,\text{N}\cdot(726013\text{mm}^3 - 50\text{mm}\cdot y^2)}{98,89\cdot 10^6\,\text{mm}^4\cdot 100\text{mm}} = \underline{3,671\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} - 0,000253\frac{\text{N}}{\text{mm}^4}y^2}$$

Leikkausjännitysjakauma:

y [mm]	S [MPa]
$-79,5$	0
$-54,5$	0,85
$-29,5\ (-)$	1,38
$-29,5\ (+)$	3,45
0	3,67
60,25	2,75
120,5	0

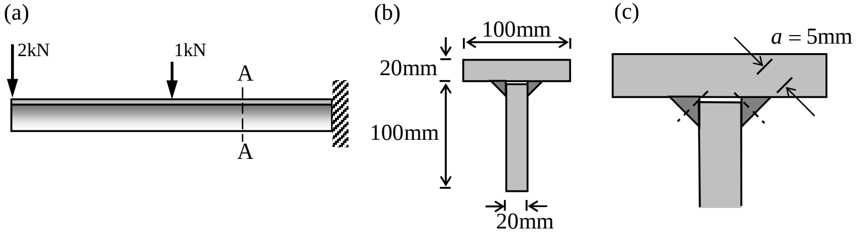




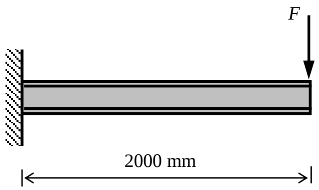
Suurin leikkausjännitys:

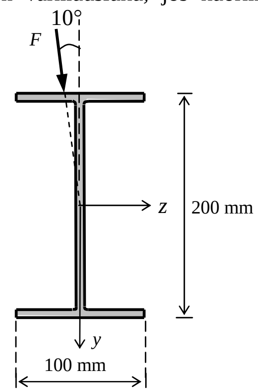
$$\tau_{xy,\max} \equiv \tau_{xy}(0) = 3,67\text{MPa}$$

1. Määritä hitsisauman (keskimääräinen) leikkausjännitys sekä poikkileikkauksen leikkausjännityksen τ_{xy} itseisarvoltaan suurin arvo oheisen palkin kohdassa A-A. Vinot pinnat, joilla hitsisauman keskimääräinen leikkausjännitys lasketaan, on esitetty katkoviivalla kuvan (c) leikkauksessa. Uuman ja laipan välille oletetaan rako. Hitsin vaikutusta poikkileikkaussuureisiin ei huomioida.
   Vastaus: $\bar{\tau} = -3{,}38\text{MPa}$, $|\tau_{xy}|_{\max} = 1{,}80\text{MPa}$

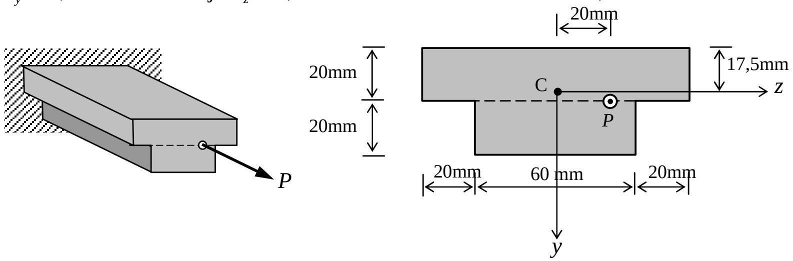


2. Kuumavalssatusta I-tangosta IPE200, jonka jäyhyysmomentit ovat $I_z = 19{,}4 \cdot 10^6\ \text{mm}^4$ ja $I_y = 1{,}42 \cdot 10^6\ \text{mm}^4$ on tehty uloke, jonka pituus on 2 m. Ulokkeen päässä on pistekuorma F. Määritä sallittu kuorma F_{sall} olettaen, että F on poikkileikkauksen symmetriatasossa, käyttäen varmuuslukua 2 myötöön nähden. Myötöraja on $\sigma_m = 340\ \text{N/mm}^2$. Mikä on varmuusluku, jos kuorma kääntyy 10° oheisen kuvan esittämällä tavalla?
   Vastaus: $F_{\text{sall}} = 16{,}49$ kN, $n = 0{,}92$





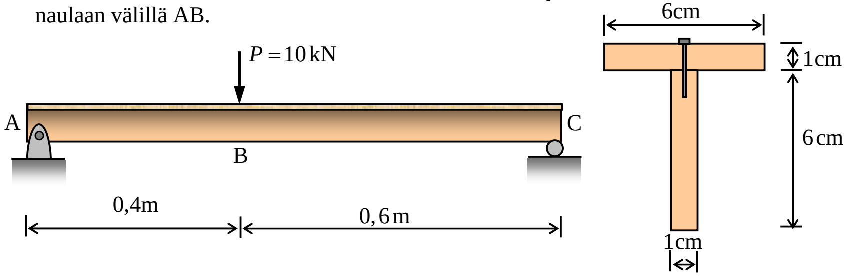
3. Oheiseen ulokepalkkiin vaikuttaa aksiaalinen vetovoima P kuvan mukaisesti. Määritä suurin sallittu voima P, jos vetojännitys palkissa ei saa ylittää 75MPa. Poikkileikkauksen pinta-ala ja jäyhyysmomentit ovat $A = 3200\text{mm}$, $I_y = 2{,}0267 \cdot 10^6\,\text{mm}^4$ ja $I_z = 0{,}40667 \cdot 10^6\,\text{mm}^4$. *Vastaus:* $P = 91{,}3\text{kN}$



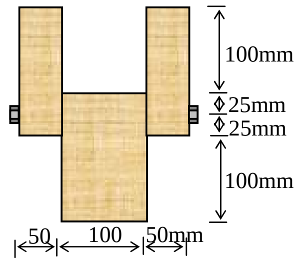
Palautettavat kotitehtävät

Palautus pe **23.11 klo 16.00 mennessä** Nopassa olevien ohjeiden mukaisesti.

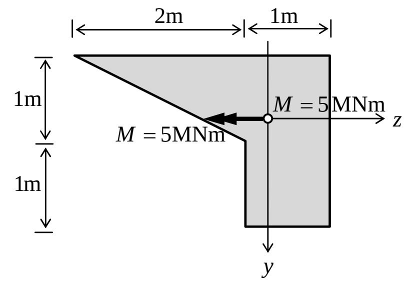
I. Oheinen palkki muodostuu kahdesta lankusta, jotka on kiinnitetty toisiinsa nauloilla, jotka sijaitsevat pitkin palkkia 2cm:n välein. Palkkia kuormittaa $P = 10\text{kN}$ suuruinen voima. Määritä leikkausvoima, joka kohdistuu kuhunkin naulaan välillä AB.

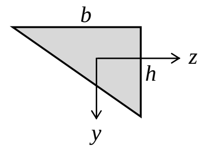


II. Palkki muodostuu kolmesta lankusta, jotka on liitetty yhteen teräspulteilla, jotka sijaitsevat 225mm:n välein palkin pituussuunnassa. Määritä pienin sallittu pultin halkaisija, kun leikkausvoima palkin poikkileikkauksessa on 6kN ja sallittu keskimääräinen leikkausjännitys kussakin pultissa on 60MPa.



III. Palkkia, jonka poikkileikkaus on kuvan mukainen, kuormitetaan pystytasossa siten, että taivutusmomentilla tarkasteltavassa poikki-leikkauksessa on arvo $M = 5\text{MNm}$. Määritä poikkileikkauksen suurin ja pienin normaalijännitys.



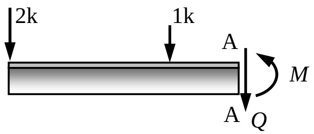


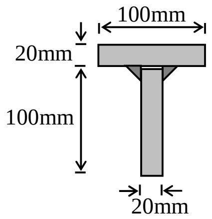
$$I_y = \frac{b^3 h}{36},\ I_z = \frac{b h^3}{36},\ I_{yz} = \frac{b^2 h^2}{72}$$

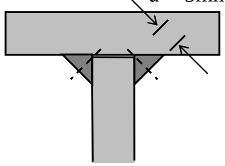
Ohje: Suorakulmaisen kolmion jäyhyysmomentit ja tulomomentti pintakeskiö-akseleiden suhteen ovat kuvan mukaiset

1.

Leikkausvoima:

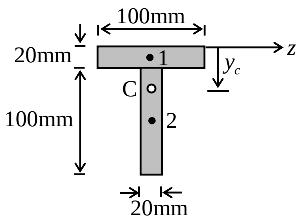






$Q + 1\text{kN} + 2\text{kN} = 0 \;\Rightarrow\; Q = -3\text{kN}$

Pintakeskiö:



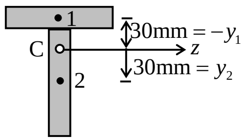
$A_1 = 100 \cdot 20 = 2000\text{m}^2, \quad A_2 = 20 \cdot 100 = 2000\text{mm}^2$

$A = A_1 + A_2 = 4000\text{mm}^2$

$y_1 = 10\text{mm}, \; y_2 = 20\text{mm} + \frac{1}{2} \cdot 100\text{mm} = 70\text{mm}$

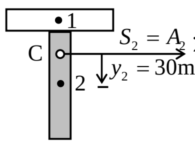
$y_c = \dfrac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A} = 40\text{mm}$

Jäyhyysmomentti I_z:



$$I_z = I_{\bar{z}1} + A_1 y_1^2 + I_{\bar{z}2} + A_2 y_2^2 = \frac{100 \cdot 20^3}{12} + 2000 \cdot (-30)^2 + \frac{20 \cdot 100^3}{12} + 2000 \cdot 30^2 = \underline{\underline{5,33 \cdot 10^6\,\text{mm}^4}}$$

Hitsisauman alapuoleisen osan staattinen momentti:

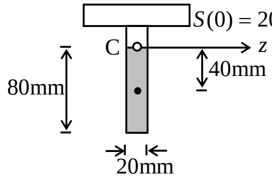


$S_2 = A_2 \cdot y_2 = 2000 \cdot 30 = 60000\text{mm}^3$

Leikkausvuo ja hitsin leikkausjännitys:

$$q = \frac{QS_2}{I} = \frac{-3 \cdot 10^3\,\text{N} \cdot 60000\text{mm}^3}{5,33 \cdot 10^6\,\text{mm}^4} = -33,77\text{N/mm}, \quad \bar{\tau} = \frac{-33,77\text{N/mm}}{2 \cdot 5\text{mm}} = \underline{\underline{-3,38\text{MPa}}}$$

z-akselin alapuoleisen osan staattinen momentti:



$S(0) = 20 \cdot 80 \cdot 40 = 64000\text{mm}^3$

Leikkausjännitys:

$$\tau_{xy}(0) = \frac{QS(0)}{Ib} = \frac{-3 \cdot 10^3\,\text{N} \cdot 64000\text{mm}^3}{5,33 \cdot 10^6\,\text{mm}^4 \cdot 20\text{mm}} = \underline{-1,80\text{MPa}}$$

$$\Rightarrow \; |\tau_{xy}|_{\max} = \underline{\underline{1,80\text{MPa}}}$$

2.

<u>Sallittu jännitys:</u> $\sigma_{\text{sall}} = \dfrac{\sigma_m}{n} = \dfrac{340}{2}\dfrac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 170\dfrac{\text{N}}{\text{mm}^2}$.

<u>Kuorma on symmetriatasossa eli F vaikuttaa y-akselin suuntaan:</u>

Taivutusmomentin arvo tuella on: $M_z = -F \cdot 2000\,\text{mm}$, $(M_y = 0)$

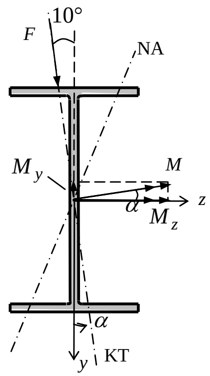
Reunajännitys:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{I_z} y_{\text{ylä}} = \frac{-F \cdot 2000\ \text{mm}}{19,4 \cdot 10^6\,\text{mm}^4} \cdot (-100\ \text{mm}) = 0,010309 \cdot F \frac{1}{\text{mm}^2} \quad \text{(veto yläpinn.)}$$

Suurin sallittu kuorma:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{sall}} \quad \Rightarrow \quad F_{\text{sall}} = F = \frac{170}{0,010309}\,\text{N} = \underline{\underline{16,49\ \text{kN}}}.$$

<u>Kuormitus on kääntynyt 10° kuvan esittämällä tavalla:</u>



Kuormitustason suuntakulma: $\alpha = 10°$

Taivutusmomentit: ($F = 16,49$ kN)

$M = -F \cdot 2000\ \text{mm} = -32,98\,\text{kNm}$

$M_z = M \cos\alpha = -32,98 \cdot \cos(10°)$

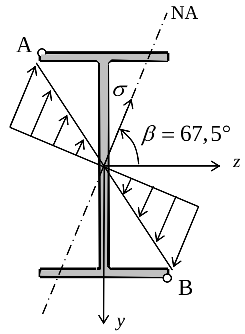
$= -32,48\,\text{kNm}$

$M_y = M \sin\alpha = -32,98 \cdot \sin(10°)$

$= -5,73\,\text{kNm}$

Neutraaliakselin suuntakulma: $\beta = \arctan\dfrac{M_y I_z}{M_z I_y} = \arctan\dfrac{-5,73 \cdot 19,4 \cdot 10^6}{-32,48 \cdot 1,42 \cdot 10^6} = 67,5°$

Harjoitus 8 Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi
Ratkaisut



Kauimpana neutraaliakselista ovat pisteet A ja B.

Normaalijännitys saadaan lausekkeesta:

$$\sigma(y,z) = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

Piste A $(y_A, z_A) = (-100\ \text{mm}, -50\ \text{mm})$:

$$\sigma_A = \frac{M_z}{I_z} y_A + \frac{M_y}{I_y} z_A = \frac{-32,48 \cdot 10^6}{19,4 \cdot 10^6} \cdot (-100) + \frac{-5,73 \cdot 10^6}{1,42 \cdot 10^6} \cdot (-50) = 369,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

Piste B $(y_B, z_B) = (100\ \text{mm}, 50\ \text{mm})$:

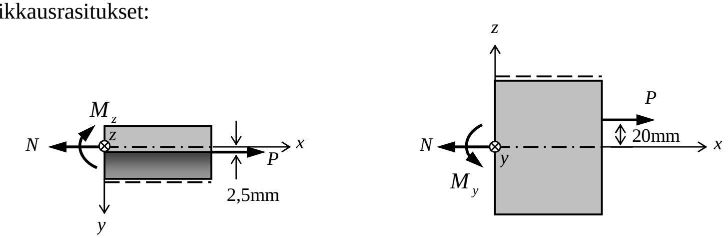
$$\sigma_B = \frac{M_z}{I_z} y_B + \frac{M_y}{I_y} z_B = \frac{-32,48 \cdot 10^6}{19,4 \cdot 10^6} \cdot 100 + \frac{-5,73 \cdot 10^6}{1,42 \cdot 10^6} \cdot 50 = -369,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = -\sigma_A$$

Varmuusluku:

$$n = \frac{\sigma_m}{\sigma_A} = \frac{340}{369,2} = 0,92 < 1 \quad \text{(Rakenne myötää !)}$$

3.

Leikkausrasitukset:

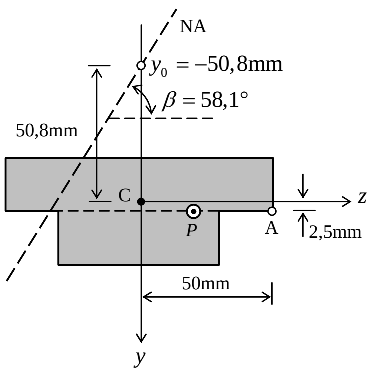


$$\rightarrow \quad N - P = 0 \qquad \Rightarrow \quad N = P$$
$$\otimes z \quad M_z - P \cdot 2{,}5\text{mm} = 0 \qquad \Rightarrow \quad M_z = P \cdot 2{,}5\text{mm}$$
$$\otimes y \quad -M_y + P \cdot 20\text{mm} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_y = P \cdot 20\text{mm}$$

Neutraaliakseli:

$$y_0 = -\frac{I_y I_z - \overbrace{I_{yz}^2}^{0}}{M_z I_y - M_y \underbrace{I_{yz}}_{0}} \frac{N}{A} = -\frac{I_z}{M_z}\frac{N}{A} = -\frac{0{,}40667 \cdot 10^6\,\text{mm}^4}{P \cdot 2{,}5\text{mm}} \frac{P}{3200\text{mm}^2} = -50{,}8\text{mm}$$

$$\beta = \arctan\frac{M_y I_z - M_z \overbrace{I_{yz}}^{0}}{M_z I_y - M_y \underbrace{I_{yz}}_{0}} = \arctan\frac{M_y I_z}{M_z I_y} = \arctan\frac{P \cdot 20\text{mm} \cdot 0{,}40667 \cdot 10^6\,\text{mm}^4}{P \cdot 2{,}5\text{mm} \cdot 2{,}0267 \cdot 10^6\,\text{mm}^4} = 58{,}1°$$



Itseisarvoltaan suurin normaalijännitys on pisteessä A, joka etäisyys neutraaliakselista on suurin:

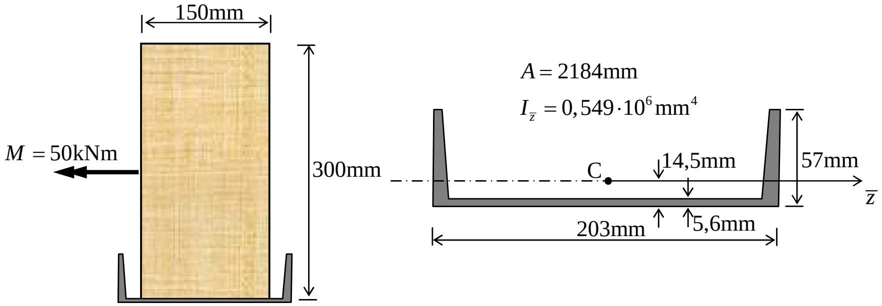
Harjoitus 8 Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi
Ratkaisut

$$\sigma_{\max} \equiv \sigma_A = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y_A + \frac{M_y}{I_y} z_A$$
$$= \frac{P}{3200\text{mm}^2} + \frac{P \cdot 2{,}5\text{mm}}{0{,}40667 \cdot 10^6\,\text{mm}^2} 2{,}5\text{mm} + \frac{P \cdot 20\text{mm}}{2{,}0267 \cdot 10^6\,\text{mm}^2} 50\text{mm} = \underline{8{,}213 \cdot 10^{-4}\,\frac{P}{\text{mm}^2}}$$

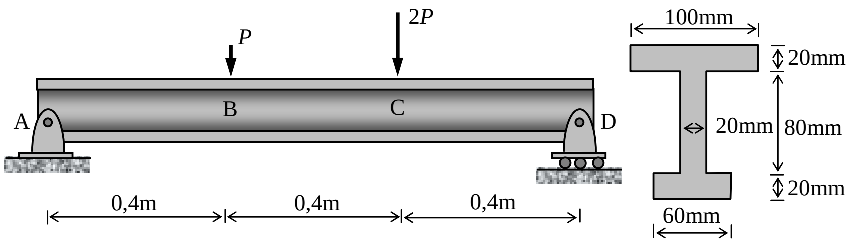
Suurin sallittu kuorma *P*:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{sall}} \;\Leftrightarrow\; 8{,}213 \cdot 10^{-4}\,\frac{P}{\text{mm}^2} = 75\frac{N}{\text{mm}^2} \;\Rightarrow\; P = \frac{75}{8{,}213} \cdot 10^4 N = 9{,}132 \cdot 10^4\,\text{N} = \underline{\underline{91{,}3\text{kN}}}$$

1. Puupalkkia on vahvistettu kiinnittämällä siihen teräsprofiili kuvan mukaisesti. Puun kimmomoduuli on 12GPa ja teräksen 200GPa. Palkin poikkileikkausta rasittaa taivutusmomentti $M = 50\text{kNm}$. Määritä teräksen suurin sekä puun suurin ja pienin normaalijännitys. Piirrä myös osapoikkileikkausten normaalijännitysjakautumat. Teräsprofiilin mitat ja poikkileikkaussuureet on esitetty kuvassa. *Vastaus:* $\sigma_{1,\max} = 103,2\text{MPa}$, $\sigma_{2,\max} = 5,8\text{MPa}$, $\sigma_{2,\min} = -14,3\text{MPa}$.



2. Kuinka suuri kuorma P oheiselle palkille voidaan sallia, kun varmuusluku palkin sortumisen suhteen on 2,5. Materiaalin otaksutaan olevan kimmoista ideaaliplastista myötärajan ollessa 240MPa. *Vastaus:* $P_{\text{sall}} = 26,5\text{kN}$.

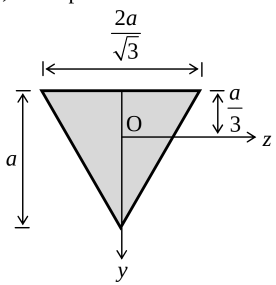


3. Tarkastellaan oheista tasasivuisen kolmion muotoista poikkileikkausta. (a) Osoita että funktio

$$\phi(y,z) = G\theta[-\frac{1}{2}(y^2+z^2)+\frac{1}{2a}(y^3-3yz^2)+\frac{2}{27}a^2]$$

on poikkileikkauksen vääntöjännitysfunktio näyttämällä, että se toteuttaa vääntöjännitysfunktion differentiaaliyhtälön ja reunaehdot. (b) Määritä leikkausjännitysten τ_{xy} ja τ_{xz} lausekkeet sekä piirrä niiden kuvaajat $y-$akselilla ja poikkileikkauksen yläreunalla $y = -a/3$. (c) Määritä lauseke poikkileikkauksen vääntöjäyhyysmomentille I_t. (d) Määritä resultoivan leikkausjännityksen itseisarvoltaan suurin arvo $\tau_{\max}$, kun poikkileikkauksessa vaikuttaa vääntömomentti M_t. *Osittainen vastaus:*

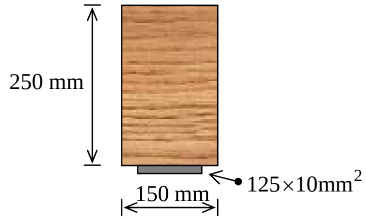
(c) $I_t = \dfrac{a^4}{15\sqrt{3}}$, (d) $\tau_{\max} = \dfrac{M_t a}{2I_t}$



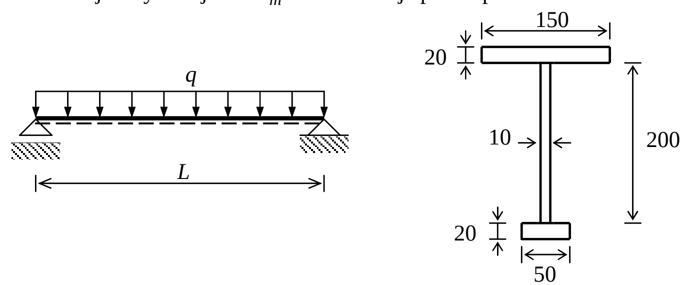
Palautettavat kotitehtävät:

Palautus **pe 30.11 klo 16.00 mennessä** Nopassa olevien ohjeiden mukaisesti.

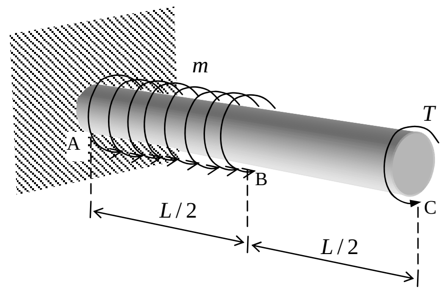
I. Puupalkkia on vahvistettu teräskappaleella oheisen kuvan osoittamalla tavalla. Tarkasteltavaan poikkileikkaukseen kohdistuu 50kNm:n suuruinen taivutusmomentti ja 15kN:n suuruinen leikkausvoima. Määritä suurin ja pienin normaalijännitys poikkileikkauksen puuosassa ja terässosassa sekä leikkausvuo puuosan ja teräsosan välisessä liitoksessa. Teräksen kimmomoduli on 200GPa ja puun 13GPa.



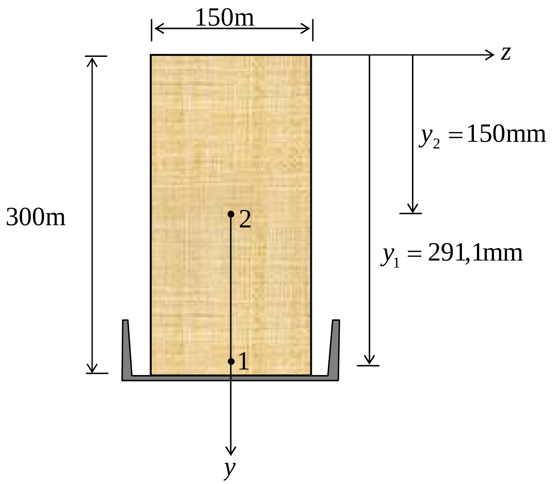
II. Kuinka suuren kuorman q oheinen tasaisesti kuormitettu palkki kantaa, kun palkin kriittisin poikkileikkaus on täysin plastisoitunut. Oheisessa kuvassa profiilin mitat ovat millimetrejä. Myötöraja on $\sigma_m = 300$ MPa ja palkin pituus $L = 3$ m.



III. Oheinen ympyräpoikkileikkauksellinen sauva AC on päästä A jäykästä kiinnitetty ja pää C on vapaa. Vapaata päätä kuormittaa vääntömomenttikuorma $T = 3$ kNm. Lisäksi välillä AB on kuormituksena tasan jakautunut vääntömomenttikuorma $m = 200$ Nm/m. Määritä ja piirrä leikkausjännityksen jakauma tuella A sijaitsevassa poikkileikkauksessa sekä määritä sen suurin arvo. Määritä myös leikkausjännityksen suurin arvo kohdassa B. Sauvan halkaisija on $D = 60$ mm ja sen pituus on $L = 1$m.



1.



Kimmomoduulisuhde:

$$n = \frac{E_2}{E_1} = \frac{12}{200} = 0{,}06$$

Muunnetun poikkileikkauksen ala ja pintakeskiö:

$$A_1 = 2184\text{mm}^2,\ A_2 = 150 \cdot 300 = 45000\text{mm}^2,\ A_r = A_1 + nA_2 = 4884\text{mm}^2$$

$$y_{cr} = \frac{A_1 y_1 + nA_2 y_2}{A_r} = \frac{2184 \cdot 291{,}1 + 0{,}06 \cdot 45000 \cdot 150}{4884} = 213{,}10\text{mm}$$

Muunnetun poikkileikkauksen jäyhyysmomentti *z*-akselin suhteen:

$$I_{z1} = I_{\bar{z}1} + y_1^2 A_1 = 0{,}549 \cdot 10^6 + 291{,}1^2 \cdot 2184 = 185{,}62 \cdot 10^6\text{mm}^4$$

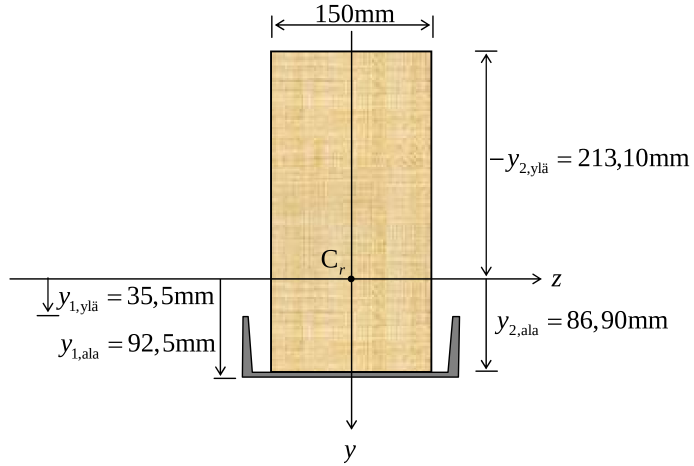
$$I_{z2} = I_{\bar{z}2} + y_2^2 A_2 = \frac{150 \cdot 300^3}{12} + 150^2 \cdot 45000 = 1350 \cdot 10^6\text{mm}^4$$

$$I_{zr} = I_{z1} + nI_{z2} = 185{,}62 \cdot 10^6 + 0{,}06 \cdot 1350 \cdot 10^6 = 266{,}62 \cdot 10^6\text{mm}^4$$

Muunnetun poikkileikkauksen jäyhyysmomentti pintakeskiöakselinsa suhteen:

$$I_r = I_{\bar{z}r} = I_{zr} - y_{cr}^2 A_r = 266{,}62 \cdot 10^6 - 213{,}10^2 \cdot 4884 = 44{,}83 \cdot 10^6\text{mm}^4$$

Harjoitus 9 Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi
Ratkaisut



$$\sigma_{1,\text{ylä}} = \frac{M}{I_r} y_{1,\text{ylä}} = \frac{50 \cdot 10^6\,\text{Nmm}}{44{,}83 \cdot 10^6\,\text{mm}^4} \cdot 35{,}5\text{mm} = \underline{39{,}6\text{MPa}}$$

$$\sigma_{1,\text{ala}} = \frac{M}{I_r} y_{1,\text{ala}} = \frac{50 \cdot 10^6\,\text{Nmm}}{44{,}83 \cdot 10^6\,\text{mm}^4} \cdot 92{,}5\text{mm} = \underline{103{,}2\text{MPa}}$$

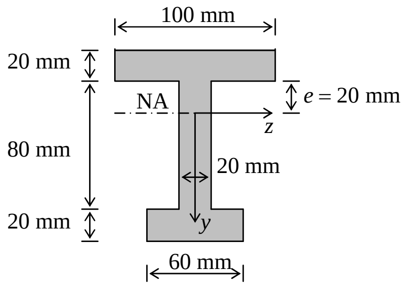
$$\sigma_{2,\text{ylä}} = n\frac{M}{I_r} y_{2,\text{ylä}} = 0{,}06 \cdot \frac{50 \cdot 10^6\,\text{Nmm}}{44{,}83 \cdot 10^6\,\text{mm}^4} \cdot (-213{,}10\text{mm}) = \underline{-14{,}3\text{MPa}}$$

$$\sigma_{2,\text{ala}} = n\frac{M}{I_r} y_{2,\text{ala}} = 0{,}06 \cdot \frac{50 \cdot 10^6\,\text{Nmm}}{44{,}83 \cdot 10^6\,\text{mm}^4} \cdot 86{,}90\text{mm} = \underline{5{,}8\text{MPa}}$$

Teräksen suurin sekä puun suurin ja pienin normaalijännitys:

$$\sigma_{1,\max} = \underline{\underline{103{,}2\text{MPa}}},\quad \sigma_{2,\max} = \underline{\underline{5{,}8\text{MPa}}},\quad \sigma_{2,\min} = \underline{\underline{-14{,}3\text{MPa}}}$$

2.



Neutraaliakselin (NA) asema:

$$A = (100\cdot 20 + 80\cdot 20 + 60\cdot 20)\text{mm}^2 = 4800\ \text{mm}^2,$$
$$A_{\text{ylä}} = A_{\text{ala}} = A/2 = 2400\ \text{mm}^2,$$
$$A_{\text{ylä}} \equiv 100\cdot 20\text{mm} + 20\text{mm}\cdot e = 2400\text{mm}^2 \ \Rightarrow\ e = 20\ \text{mm}.$$

Poikkileikkauksen staattiset momentit ovat:

$$S_{\text{ala}} = (60\cdot 20\cdot 70 + 20\cdot 60\cdot 30)\text{mm}^3 = 120000\ \text{mm}^3,$$
$$|S_{\text{ylä}}| = (100\cdot 20\cdot 30 + 20\cdot 20\cdot 10)\text{mm}^3 = 64000\ \text{mm}^3.$$

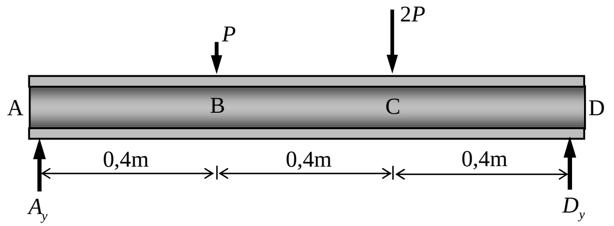
Poikkileikkauksen plastinen taivutusvastus:

$$W_p = S_{\text{ala}} + |S_{\text{ylä}}| = (120000 + 64000)\text{mm}^3 = 184000\ \text{mm}^3,$$

Poikkileikkauksen täysplastinen momentti:

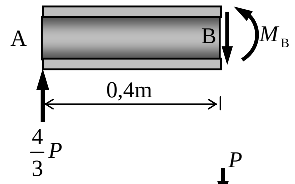
$$M_p = \sigma_m W_p = 240\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\cdot 184000\ \text{mm}^3 = 44{,}16\ \text{kNm}.$$

Tukireaktio A_y:

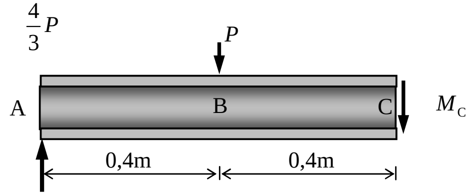


$$\text{D}\circlearrowleft\ A_y\cdot 1{,}2\text{m} - P\cdot 0{,}8\text{m} - 2P\cdot 0{,}4\text{m} = 0 \ \Rightarrow\ A_y = \frac{4}{3}P$$

Taivutusmomentit pisteissä B ja C:



$$\text{B}\circlearrowleft\ M_{\text{B}} - \frac{4}{3}P\cdot 0{,}4\text{m} = 0 \ \Rightarrow\ M_{\text{B}} = P\cdot\frac{8}{15}\text{m}$$



$$\text{C}\circlearrowleft\ M_{\text{C}} - \frac{4}{3}P\cdot 0{,}8\text{m} + P\cdot 0{,}4\text{m} = 0 \ \Rightarrow\ M_{\text{C}} = P\cdot\frac{2}{3}\text{m}$$

Koska taivutusmomentit tuilla A ja D ovat nollia ja taivutusmomentin jakauma kuormittamattomilla väleillä AB, BC ja CD on lineaarinen, on palkin suurin taivutusmomentti pisteessä C, joten

$$M_{\max} = M_{\text{C}} = P\cdot\frac{2}{3}\text{m}$$

Rajatilassa $M_{\max} = M_p$, joten plastiselle rajakuormalle saadaan

$$P_p\cdot\frac{2}{3}\text{m} = 44{,}16\ \text{kNm} \ \Rightarrow\ P_p = \frac{3}{2}\cdot 44{,}16\ \text{kN} = \frac{3}{2}\cdot 44{,}16\ \text{kN} = \underline{66{,}24\text{kN}}$$

Varmuusluku sortumista vastaan on $n = P_p / P_{\text{sall}}$, joten sallitulle kuormalle saadaan

$$P_{\text{sall}} = \frac{P_p}{n} = \frac{66{,}24\text{kN}}{2{,}5} = \underline{\underline{26{,}5\text{kN}}}$$

3:

(a) Derivoimalla funktiota

$$\phi(y,z) = G\theta[-\frac{1}{2}(y^2+z^2) + \frac{1}{2a}(y^3 - 3yz^2) + \frac{2}{27}a^2]$$

kerran saadaan

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = G\theta[-y + \frac{3}{2a}(y^2 - z^2)], \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = -G\theta(1 + \frac{3}{a}y)z,$$

ja toisen kerran

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = -G\theta(1 - \frac{3}{a}y), \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = -G\theta(1 + \frac{3}{a}y).$$

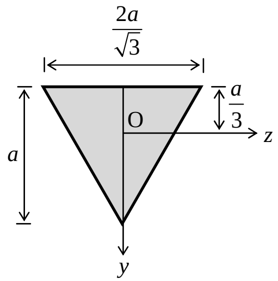
Kenttäyhtälön

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + 2G\theta = 0$$

tulisi toteutua. Vasen puoli saa muodon

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + 2G\theta = -G\theta(1 - \frac{3}{a}y) - G\theta(1 + \frac{3}{a}y) + 2G\theta = 0 \quad \text{OK.}$$

Kenttäyhtälö siis toteutui.



Reunaehdon $\phi = 0$ poikkileikkauksen reunoilla tulisi toteutua. Poikkileikkauksen yläreunan yhtälö on

$$y = -\frac{a}{3}.$$

Vääntöjännitysfunktiolle tällä reunalla saadaan

$$\phi(-\frac{a}{3}, z) = G\theta\{-\frac{1}{2}[(\frac{a}{3})^2 + z^2] + \frac{1}{2a}[(-\frac{a}{3})^3 - 3(-\frac{a}{3})z^2] + \frac{2}{27}a^2\}$$

$$= G\theta(-\frac{a^2}{18} - \frac{z^2}{2} - \frac{a^2}{54} + \frac{z^2}{2} + \frac{2}{27}a^2) = 0 \quad \text{OK.}$$

Reunaehto yläreunalla siis toteutui.

Poikkileikkauksen vinot reunat kulkevat pisteiden $(y_1, z_1) = (-a/3, \mp a/\sqrt{3})$ ja $(y_2, z_2) = (2a/3, 0)$ kautta. Niiden yhtälöiksi saadaan siten

Harjoitus 9 Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi
Ratkaisut

$$z - z_1 = \frac{z_2 - z_1}{y_2 - y_1}(y - y_1) \Rightarrow z \pm \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\pm\frac{a}{\sqrt{3}}}{\frac{2a}{3} + \frac{a}{3}}(y + \frac{a}{3}) \Rightarrow z = \frac{\pm\frac{a}{\sqrt{3}}}{\frac{2a}{3} + \frac{a}{3}}(y + \frac{a}{3} - a)$$

$$z = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{2a}{3} - y).$$

Kohta tarvitaan z:n neliö, joten sille saadaan

$$z^2 = \frac{1}{3}(\frac{2a}{3} - y)^2 = \frac{1}{3}(\frac{4}{9}a^2 - \frac{4}{3}ay + y^2)$$

Vääntöjännitysfunktiolle näillä reunoilla saadaan

$$\phi = G\theta[-\frac{1}{2}(y^2+z^2) + \frac{1}{2a}(y^3 - 3yz^2) + \frac{2}{27}a^2]$$

$$= G\theta[-\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}(\frac{4a^2}{9} - \frac{4}{3}ay + y^2) + \frac{1}{2a}(y^3 - \frac{4}{9}a^2y + \frac{4}{3}ay^2 - y^3) + \frac{2}{27}a^2]$$

$$= G\theta(-\frac{1}{2}y^2 + \frac{2}{3}y^2 - \frac{1}{6}y^2 - \frac{2}{9}ay + \frac{2}{9}ay - \frac{2}{27}a^2 + \frac{2}{27}a^2) = 0 \quad \text{OK.}$$

(b) Leikkausjännityksille saadaan

$$\tau_{xy} \equiv \frac{\partial\phi}{\partial z} = -G\theta(1 + \frac{3}{a}y)z, \quad \tau_{xz} \equiv -\frac{\partial\phi}{\partial y} = G\theta[y - \frac{3}{2a}(y^2 - z^2)].$$

Niille saadaan $y-$akselilla $z = 0$

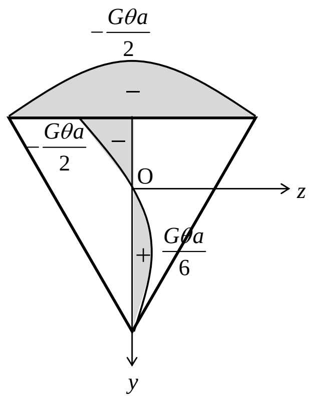
$$\tau_{xy}(y,0) = 0, \quad \tau_{xz}(y,0) = G\theta a(\frac{y}{a} - \frac{3}{2}\frac{y^2}{a^2})$$

ja yläreunalla $y = -a/3$

$$\tau_{xy}(-\frac{a}{3}, z) = -G\theta(1 - \frac{3}{a}\frac{a}{3})z = 0,$$

$$\tau_{xz}(-\frac{a}{3}, z) = G\theta[-\frac{a}{3} - \frac{3}{2a}(\frac{a^2}{9} - z^2)] = \frac{G\theta a}{2}(-1 + 3\frac{z^2}{a^2}).$$

Leikkausjännitys τ_{xz}:



(c) Merkitään vinojen reunojen yhtälöitä

$$z_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{2a}{3} - y\right),\ z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{2a}{3} - y\right).$$

Vääntöjäyhyysmomentille saadaan

$$I_t = \frac{2}{G\theta}\int_A \phi(y,z)dA = \frac{2}{G\theta}\int_{-a/3}^{2a/3}\int_{z_1(y)}^{z_2(y)} G\theta\left[-\frac{1}{2}(y^2+z^2) + \frac{1}{2a}(y^3 - 3yz^2) + \frac{2}{27}a^2\right]dydz$$

$$= \int_{-a/3}^{2a/3}\int_{z_1(y)}^{z_2(y)} \left(-y^2 - z^2 + \frac{1}{a}y^3 - \frac{3}{a}yz^2 + \frac{4}{27}a^2\right)dydz$$

$$= \int_{-a/3}^{2a/3}\Big|_{z_1(y)}^{z_2(y)} \left(-y^2 z - \frac{z^3}{3} + \frac{1}{a}y^3 z - \frac{1}{a}yz^3 + \frac{4}{27}a^2 z\right)dz$$

$$= \int_{-a/3}^{2a/3}\Big|_{z_1(y)}^{z_2(y)} \left[\left(\frac{4}{27}a^2 - y^2 + \frac{1}{a}y^3\right)z - \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{a}\right)z^3\right]dz$$

$$= \int_{-a/3}^{2a/3} \left\{\left(\frac{4}{27}a^2 - y^2 + \frac{1}{a}y^3\right)[z_2(y) - z_1(y)] - \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{a}\right)[z_2(y)^3 - z_1(y)^3]\right\}dz$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-a/3}^{2a/3} \left[\left(\frac{4}{27}a^2 - y^2 + \frac{1}{a}y^3\right)\left(\frac{2a}{3} - y\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{a}\right)\frac{1}{3}\left(\frac{2a}{3} - y\right)^3\right]dz$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-a/3}^{2a/3} \left(\frac{16}{243}a^3 - \frac{8}{81}a^2 y - \frac{4}{9}ay^2 + \frac{10}{9}y^3 - \frac{2}{3}\frac{y^4}{a}\right)dz$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\Big|_{-a/3}^{2a/3} \left(\frac{16}{243}a^3 y - \frac{4}{81}a^2 y^2 - \frac{4}{27}ay^3 + \frac{5}{18}y^4 - \frac{2}{15}\frac{y^5}{a}\right) = \underline{\underline{\frac{a^4}{15\sqrt{3}}}}$$

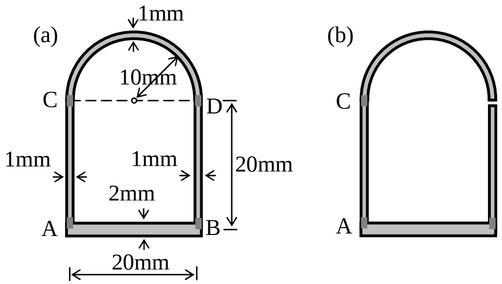
(d) Kalvoanalogian ja symmetrian perusteella voidaan päätellä, että itseisarvoltaan suurin resultoiva leikkausjännitys on kunkin sivun keskipisteessä. Se on helpoin laskea yläsivun keskipisteessä. Leikkausjännityskomponenteille saadaan

$$\tau_{xy}\left(-\frac{a}{3}, 0\right) = -G\theta\left(1 - \frac{3}{3}\right)0 = 0,\ \tau_{xz}\left(-\frac{a}{3}, 0\right) = G\theta\left[-\frac{a}{3} - \frac{3}{2a}\left(\frac{a^2}{9} - 0\right)\right] = -\frac{G\theta a}{2}.$$

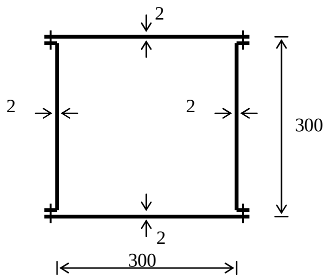
ja resultoivalle leikkausjännitykselle

$$\tau_{\max} = \sqrt{\tau_{xy}\left(-\frac{a}{3}, 0\right)^2 + \tau_{xz}\left(-\frac{a}{3}, 0\right)^2} = \frac{G\theta a}{2} = \underline{\underline{\frac{M_t a}{2I_t}}}$$

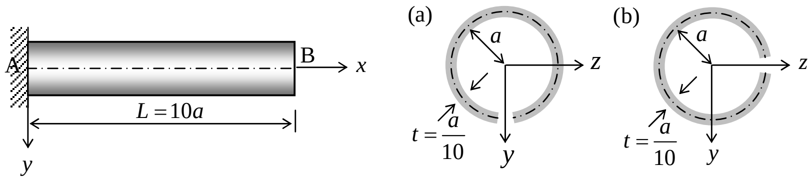
1. Oheinen ohutseinämäinen profiili (seuraavalla sivulla) on koottu hitsaamalla yhteen poikkileikkaukseltaan puoliympyrän muotoinen profiili ja kolme lattarautaa pitkittäishitseillä A, B, C ja D. Poikkileikkausta rasittaa 20Nm:n suuruinen vääntömomentti. Määritä suurin leikkausjännitys poikkileikkauksessa, kun (a) hitsaus on tehty moitteettomasti ja (b) kun sauma D on unohtunut hitsata. Määritä myös sauvan vääntymä poikkileikkauksen kohdalla molemmissa tapauksissa. Sauva on terästä, jonka leikkausmoduuli on $G = 80\text{GPa}$. *Vastaus:* (a) $\tau_{\max} = 17{,}95\text{MPa}$, $\theta = 1{,}64 \cdot 10^{-2}\, 1/\text{m}$, (b) $\tau_{\max} = 518{,}5\text{MPa}$, $\theta = 3{,}241/\text{m}$.



2. Oheinen putki on tehty niittaamalla kahdesta suorasta ja kahdesta taivutetusta kevyt-metallilevystä. Määritä pitkittäissaumojen suurin mahdollinen niittien välimatka, kun poikkileikkausta rasittaa vääntömomentti 6 kNm. Niitin halkaisija on $d = 6\,\text{mm}$ ja niitin suurin sallittu leikkausjännitys $\tau_{\text{sall}} = 90\,\text{MPa}$. Niitinreiän reunan suurin sallittu pintapaine on $p_{\text{sall}} = 180\,\text{MPa}$. *Vastaus:* 64,8mm.



3. Halkaistun ympyräputken muotoista ulokepalkkia AB rasittaa sen oma paino. Tarkastellaan kahta tapausta, joissa putken halkaisukohta on (a) pystytasossa ja (b) vaakatasossa oheisten kuvien mukaisesti. Määritä suurin palkissa vaikuttava normaalijännitys ja leikkausjännitys molemmissa tapauksissa.
Vastaus: (a) ja (b): $\sigma_{x,\max} = 100\rho g a$, tuella A yläreinassa.
(a) $\tau_{\max} = 20\rho g a$ (b) $\tau_{\max} = 640\rho g a$, tuella A korkeudella $z = 0$.

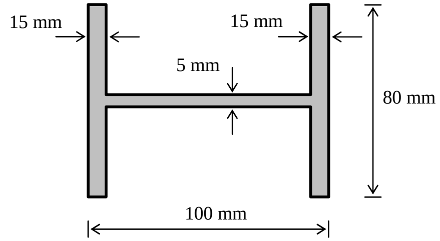


Harjoitus 10 Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi

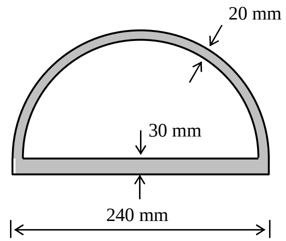
Palautettavat kotitehtävät:

Palautus **pe 7.12 klo 16.00 mennessä** Nopassa olevien ohjeiden mukaisesti.

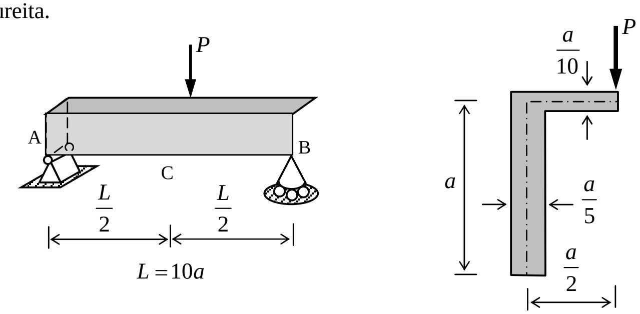
I. Oheista poikkileikkausta rasittaa 100 Nm:n vääntömomentti. Laske poikkileikkauksessa vaikuttava suurin leikkausjännitys sekä poikkileikkauksen vääntymä. Materiaalin $G = 80\,\text{GPa}$.



II. Määritä oheiselle puoliympyrän muotoiselle ohutseinäiselle suljetulle poikkileikkauk-selle sallittu suurin vääntömomentti, kun suurin sallittu leikkausjännitys on $70\,\text{MPa}$. Mikä on tällöin vääntymä ? Materiaalin $G = 80\,\text{GPa}$.

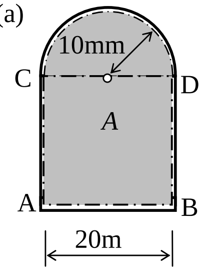


III. Oheisen kaksitukisen palkin vasemman pään A saranānivel mahdollistaa kiertymisen vaakasuoran poikittaisen akselin ympäri ja oikean pään B liikkuva niveltuki mahdollistaa liikkeen vaakatasossa. Palkin keskellä laipan reunassa vaikuttaa pistekuorma *P*. Määritä palkin suurin ja pienin normaalijännitys sekä suurin leikkausjännitys sekä niiden vaikutuspisteet. Määritä tulokset likimääräisesti käyttäen ohutseinämäisten poikkileikkausten poikkileikkaus-suureita.



1.

(a)



$$A = 20\text{mm} \cdot 20\text{mm} + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (10\text{mm})^2$$

$$= 557{,}08\text{mm}^2$$

$$W_t = 2At_{\min} = 2 \cdot 557{,}08\text{mm}^2 \cdot 1\text{mm}$$

$$= 1114{,}16\text{mm}^3$$

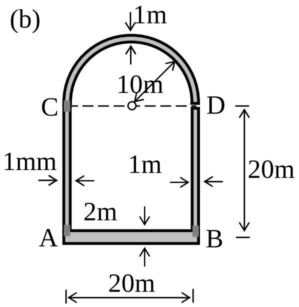
$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{20\text{N} \cdot 10^3\text{mm}}{1114{,}16\text{mm}^3} = 17{,}95\frac{\text{N}}{\text{mm}} = \underline{\underline{17{,}95\text{MPa}}}$$

$$\oint \frac{ds}{t} = \sum \frac{s_i}{t_i} = \frac{20\text{mm}}{2\text{mm}} + 2 \cdot \frac{20\text{mm}}{1\text{mm}} + \frac{\pi \cdot 10\text{mm}}{1\text{mm}} = 81{,}42$$

$$I_t = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4 \cdot (557{,}08\text{mm}^2)^2}{81{,}42} = 15246{,}8\text{mm}^4$$

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t} = \frac{20\text{N} \cdot 10^3\text{mm}}{80 \cdot 10^3\,\text{N/mm}^2 \cdot 15246{,}8\text{mm}^4} = 1{,}64 \cdot 10^{-5}\,\frac{1}{\text{mm}} = \underline{\underline{1{,}64 \cdot 10^{-2}\,\frac{1}{\text{m}}}}$$

(b)



$$I_t = \frac{1}{3}\sum s_i t_i^3$$

$$= \frac{1}{3}[20 \cdot 2^3 + 2 \cdot 20 \cdot 1^3 + \pi 10 \cdot 1^3]\text{mm}^4$$

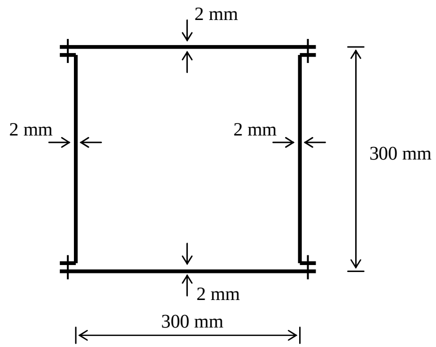
$$= 77{,}14\text{mm}^4$$

$$W_t = \frac{I_t}{t_{\max}} = \frac{77{,}14\text{mm}^4}{2\text{mm}} = 38{,}57\text{mm}^3$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{20\text{N} \cdot 10^3\text{mm}}{38{,}57\text{mm}^3} = 518{,}5\frac{\text{N}}{\text{mm}} = \underline{\underline{518{,}5\text{MPa}}}$$

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t} = \frac{20\text{N} \cdot 10^3\text{mm}}{80 \cdot 10^3\,\text{N/mm}^2 \cdot 77{,}14\text{mm}^4} = 3{,}24 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\text{mm}} = \underline{\underline{3{,}24\frac{1}{\text{m}}}}$$

2.



Suurin leikkausjännitys

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}\,,$$

missä vääntövastus on

$$W_t = 2At_{\min} = 2 \cdot (300\text{ mm})^2 \cdot 2\text{ mm} = 3.60 \cdot 10^5\text{mm}^3,$$

joten suurimmalle leikkausjännitykselle saadaan

$$\tau_{\max} = \frac{6 \cdot 10^6\,\text{Nmm}}{3.60 \cdot 10^5\,\text{mm}^3} = 16.66\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\,.$$

Leikkausvuo liitettävien osien välillä on

$$q = \tau_{\max} t = 16.66\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 2\text{ mm} = 33.33\,\frac{\text{N}}{\text{mm}}\,.$$

Suurin niitille sallittu leikkausvoima on

$$Q_n = A_n \tau_{\text{sall}} = \pi \cdot (3\text{ mm})^2 \cdot 90\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 2544\text{ N}\,.$$

Niitti ottaa leikkausvoimallaan vastaan väännöstä aiheutuvan leikkausvuon. Tästä seuraa yhtälö

$$q \cdot l = Q_n\,,$$

josta saadaan ratkaistua niittien välimatka l

$$l=\frac{Q_n}{q}=\frac{2544\ \mathrm{N}}{33.33\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}}=76.3\,\mathrm{mm}.$$

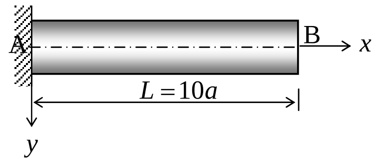
Tarkistetaan ettei reiän suurin sallittu pintapaine ylity. Kun niittien välimatka on edellä laskettu, on niitinreiän pintapaine

$$p=\frac{Q_n}{t\cdot d}=\frac{q\cdot l}{t\cdot d}=\frac{33.33\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}\cdot 76.3\,\mathrm{mm}}{2\,\mathrm{mm}\cdot 6\,\mathrm{mm}}=211.9\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}>p_{\mathrm{sall}}=180\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

eli pintapaine ylittyy ja suurin sallittu pintapaine määrää suurimman niittien välimatkan, jolle saadaan

$$l=\frac{t\cdot d}{q}\,p_{\mathrm{sall}}=\frac{2\,\mathrm{mm}\cdot 6\mathrm{mm}}{33.33\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}}\cdot 180\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}=64.8\,\mathrm{mm}.$$

3.

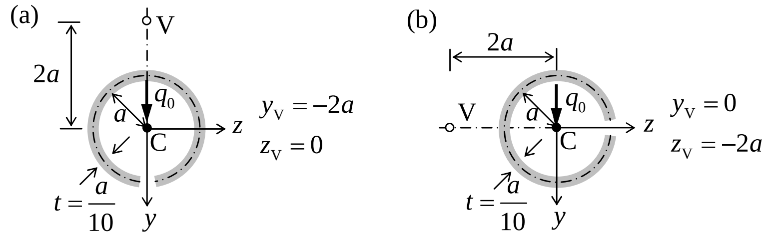


Tasan jakautunut kuorma: $q_0=2\pi a\cdot t\cdot\rho g=\dfrac{\pi}{5}\rho g a^2$

Pintakeskiö ja vääntökeskiö:

Pintakeskiö C on ympyrän keskipisteessä. Vääntökeskiön asemalle saadaan

$$e_{\mathrm{V}}=2a\frac{\overbrace{\sin\pi}^{0}-\pi\overbrace{\cos\pi}^{-1}}{\pi-\underbrace{\sin\pi}_{0}\cos\pi}=2a$$



Poikkileikkaussuureet:

$$I_z=ta^3(\pi-\overbrace{\sin\pi}^{0}\cos\pi)=\pi t a^3=\frac{\pi}{10}a^4,\ I_t=\frac{2}{3}t^3 a\pi=\frac{2\pi}{3000}a^4$$

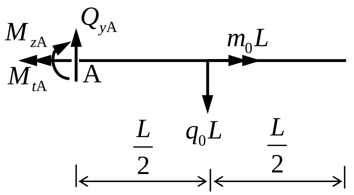
Tasan jakautunut vääntävä momenttikuorma: Omasta painosta aiheutuva kuorma q_0 kohdistuu pintakeskiöön. Siitä aiheutuu tapauksessa (b) vääntökeskiöön tasan jakautunut vääntävä momenttikuorma.

$$m_0=-q_0\cdot 2a=-\frac{2\pi}{5}\rho g a^3.$$

Leikkausrasitukset:

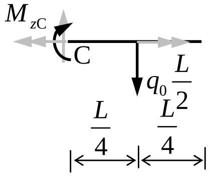
Koska $q_0 = \text{vakio}$, Q_y on lineaarinen ja M_z on kvadraatinen.
Koska $m_0 = \text{vakio}$, M_t on lineaarinen.

Piste A:



$$Q_{yA} - q_0L = 0 \;\Rightarrow\; Q_{yA} = q_0L$$
$$M_{tA} + m_0L = 0 \;\Rightarrow\; M_{tA} = -m_0L$$
$$M_{zA} + q_0L\cdot\frac{L}{2} = 0 \;\Rightarrow\; M_{zA} = -\frac{q_0L^2}{2}$$

Keskipiste C:



$$M_{zC} + \frac{q_0L}{2}\cdot\frac{L}{4} = 0 \;\Rightarrow\; M_{zC} = -\frac{q_0L^2}{8}$$

Itseisarvoltaan suurimmat arvot ovat kaikki pisteessä A.

$$Q_{y,\max} = Q_{yA} = q_0L = \frac{\pi}{5}\rho g a^2\cdot 10a = 2\pi\rho g a^3$$
$$M_{z,\min} = M_{zA} = -\frac{q_0L^2}{2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{5}\rho g a^2\cdot(10a)^2 = -10\pi\rho g a^4$$
$$M_{t,\min} = M_{tA} = -m_0L = -\frac{2\pi}{5}\rho g a^3\cdot 10a = -4\pi\rho g a^4 \text{ (tapaus (b))}$$

Tapauksessa (a) $m_0 = 0$ ja siis $M_t = 0$

<u>Suurin normaalijännitys:</u>

Tapaukset (a) ja (b):

Suurin normaalijännitys on yläreunassa ($y = -a$)

$$\sigma_{x,\max} = \frac{M_{z,\min}}{I_z}\cdot(-a) = \frac{-10\pi\rho g a^4}{\frac{\pi}{10}a^4}\cdot(-a) = \underline{\underline{100\rho g a}}$$

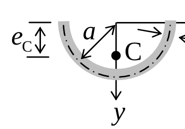
Harjoitus 10 Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi
Ratkaisut

<u>Suurin leikkausjännitys:</u>

Tapaus (a):

Suurin leikkausvoimasta aiheutuva leikkausjännitys on $z-$akselilla

$$S_z(0) = \pi a t\cdot e_C = \pi\frac{a^2}{10}\cdot\frac{\overbrace{\sin\frac{\pi}{2}}^{1}}{\frac{\pi}{2}}a = \frac{1}{5}a^3$$



$$t = \frac{a}{10}$$

$$\tau_{Q,\max} = \frac{Q_{y,\max}S_z(0)}{I_z\cdot 2t} = \frac{2\pi\rho g a^3\cdot\frac{1}{5}a^3}{\frac{\pi}{10}a^4\cdot 2\cdot\frac{a}{10}} = 20\rho g a$$

Suurin vääntömomentista aiheutuva leikkausjännitys $\tau_{M_t,\max} = 0$

Suurin kokonaisleikkausjännitys

$$\tau_{\max} = \tau_{Q,\max} + \tau_{M_t,\max} = \underline{\underline{20\rho g a}}$$

Tapaus (b):

Suurin leikkausvoimasta aiheutuva leikkausjännitys on $z-$akselilla

$$\tau_{Q,\max} = \frac{Q_{y,\max}S_z(0)}{I_z\cdot t} = \frac{2\pi\rho g a^3\cdot\frac{1}{5}a^3}{\frac{\pi}{10}a^4\cdot\frac{a}{10}} = 40\rho g a$$

Suurin vääntömomentista aiheutuva leikkausjännitys

$$\tau_{M_t,\max} = \frac{|M_{t,\min}|}{W_t} = \frac{|M_{t,\min}|}{I_t/t} = \frac{4\pi\rho g a^4}{\frac{2\pi}{3000}a^4\cdot\frac{10}{a}} = 600\rho g a$$

Suurin kokonaisleikkausjännitys

$$\tau_{\max} = \tau_{Q,\max} + \tau_{M_t,\max} = \underline{\underline{640\rho g a}}$$