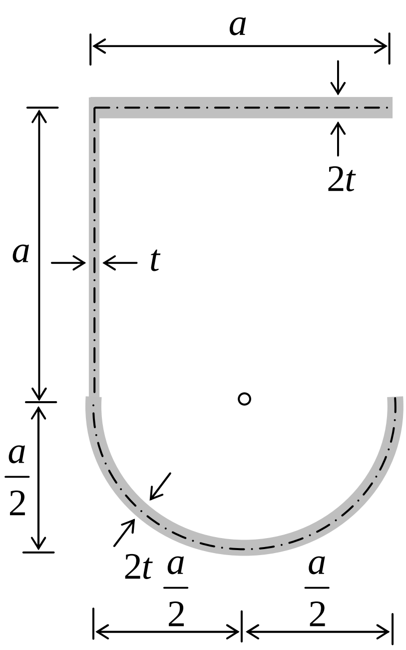
Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2011

Kotitehtävä 1:



Tarkastellaan kuvan poikkileikkausta.

(a) Määritä poikkileikkauksen pintakeskiön C etäisyydet e_y ja e_z uuman ja ylälaipan keskiviivoista.

(b) Valitse $y,z-$koordinaatistoksi pintakeskiökoordinaatisto ja piirrä poikkileikkauksen $y-$ ja $z-$kuviot.

(c) Määritä poikkileikkauksen sektoriaalinen koordinaatti ω'_{A}, jonka nollapiste O' on uuman ja ylälaipan leikkauspisteessä ja napa A on puoliympyrän muotoisen alalaipan keskiviivaympyrän keskipisteessä, sekä piirrä $\omega'_{\mathrm{A}}-$kuvio.

(d) Määritä poikkileikkauksen jäyhyysmomentit I_y ja I_z, tulomomentti I_{yz} sekä sektoriaaliset tulomomentit $I_{y\omega'_{\mathrm{A}}}$ ja $I_{z\omega'_{\mathrm{A}}}$.

(e) Määritä poikkileikkauksen vääntökeskiön koordinaatit y_{V} ja z_{V}.

Osittainen vastaus:

$e_y \approx 0,756a,\; e_z \approx 0,419a$

$I_z \approx 2,36a^3t,\; I_y \approx 0,769a^3t,\; I_{yz} \approx 0,128a^3t,$

$I_{y\omega'_{\mathrm{A}}} \approx 2,31a^4t,\; I_{z\omega'_{\mathrm{A}}} \approx 0,126a^4t$

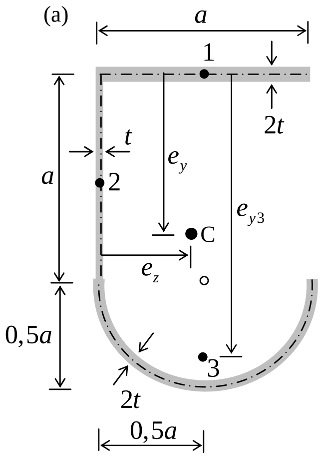
$y_{\mathrm{V}} \approx 0,245a,\; z_{\mathrm{V}} \approx -0,898a$

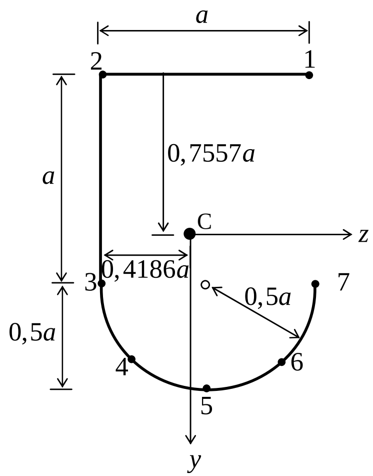
Palautus pe 16.9 klo 16.00 mennessä.

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2011

Kotitehtävän 1 ratkaisu:

(a)





$$e_{y3} = a + \overbrace{\frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2}}^{1}\frac{a}{2} = (1+\frac{1}{\pi})a$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = a\cdot 2t + a\cdot t + \pi\cdot 0{,}5a\cdot 2t = (3+\pi)at = 6{,}142at$$

$$e_y = \frac{A_1e_{y1} + A_2e_{y2} + A_3e_{y3}}{A} = \frac{2at\cdot 0 + at\cdot 0{,}5a + \pi at\cdot(1+\frac{1}{\pi})a}{(3+\pi)at} = 0{,}7557a$$

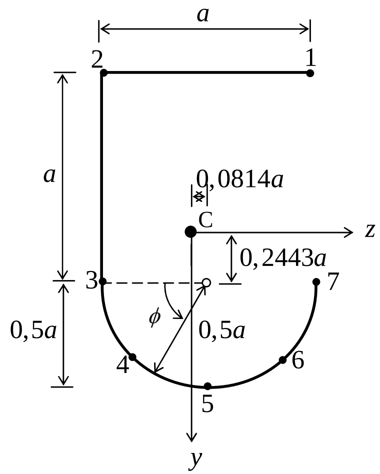
$$e_z = \frac{A_1e_{z1} + A_2e_{z2} + A_3e_{z3}}{A} = \frac{2at\cdot 0{,}5a + at\cdot 0 + \pi at\cdot 0{,}5a}{(3+\pi)at} = 0{,}4186a$$

(b) $y-$ ja $z-$koordinaatit pisteissä 1-7:

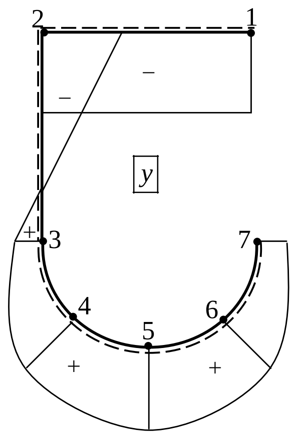
Väli 3-7:

$$y = 0{,}2443a + 0{,}5a\cdot\sin\phi$$
$$z = 0{,}0814a - 0{,}5a\cdot\cos\phi$$

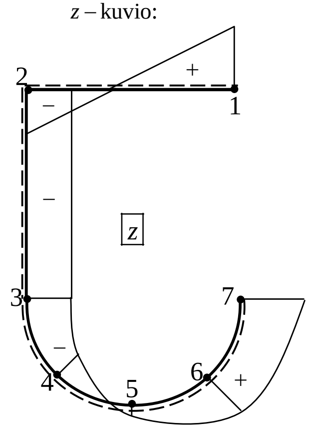
i	y_i	z_i
1	$-0{,}7557a$	$0{,}5814a$
2	$-0{,}7557a$	$-0{,}4186a$
3	$0{,}2443a$	$-0{,}4186a$
4	$0{,}5979a$	$-0{,}2722a$
5	$0{,}7443a$	$0{,}0814a$
6	$0{,}5979a$	$0{,}4350a$
7	$0{,}2443a$	$0{,}5814a$



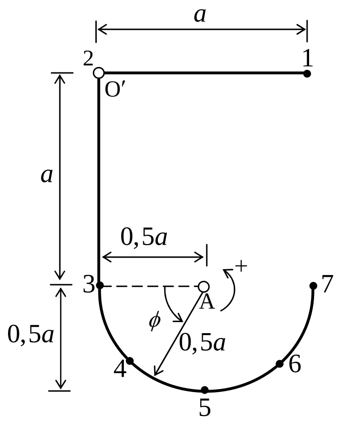
$y-$kuvio:



$z-$kuvio:



(c) Sektoriaalinen koordinaatti ω'_{A} pisteissä 1-7:



$$\omega'_{\mathrm{A2}} = 0$$

$$\omega'_{\mathrm{A1}} = \omega'_{\mathrm{A2}} - h_{12}\Delta s_{12} = 0 - a \cdot a = -a^2$$

$$\omega'_{\mathrm{A3}} = \omega'_{\mathrm{A2}} + h_{23}\Delta s_{23} = 0 + a \cdot 0{,}5a = 0{,}5a^2$$

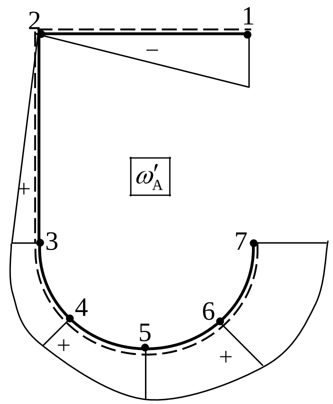
Väli 3-7:

$$\omega'_{\mathrm{A}} = \omega'_{\mathrm{A3}} + \int_3^s \overbrace{h_{\mathrm{A}}(s)}^{0{,}5a}\, ds = \omega'_{\mathrm{A3}} + 0{,}5a \cdot \int_0^\phi 0{,}5a\, d\phi$$

$$= 0{,}5a^2 + 0{,}25a^2\phi = (0{,}5 + 0{,}25\phi)a^2$$

i	$\omega'_{\mathrm{A}i}$
1	$-a^2$
2	0
3	$0{,}5a^2$
4	$0{,}6963a^2$
5	$0{,}8927a^2$
6	$1{,}0890a^2$
7	$1{,}2854a^2$

ω'_{A} – kuvio:



(d)

Lasketaan jäyhyysmomentit ja tulomomentti:

$$I_z = \int y^2 t ds = 2t\int_1^2 y^2 ds + t\int_2^3 y^2 ds + 2t\int_3^7 y^2 ds,$$

$$I_y = \int z^2 t ds = 2t\int_1^2 z^2 ds + t\int_2^3 z^2 ds + 2t\int_3^7 z^2 ds,$$

$$I_{yz} = \int yz t ds = 2t\int_1^2 yz ds + t\int_2^3 yz ds + 2t\int_3^7 yz ds.$$

$$\int_1^2 y^2 ds = a \cdot (-0{,}7557a)^2 = \underline{0{,}5711a^3}$$

$$\int_1^2 z^2 ds = \frac{a}{3} \cdot [(0{,}5814a)^2 + 0{,}5814a \cdot (-0{,}4186a) + (-0{,}4186a)^2] = \underline{0{,}0900a^3}$$

$$\int_1^2 yz ds = \frac{a}{2} \cdot (-0{,}7557a) \cdot (0{,}5814a - 0{,}4186a) = \underline{-0{,}0615a^3}$$

$$\int_2^3 y^2 ds = \frac{a}{3} \cdot [(-0{,}7557a)^2 - 0{,}7557a \cdot 0{,}2443a + (0{,}2443a)^2] = \underline{0{,}1487a^3}$$

$$\int_2^3 z^2 ds = a \cdot (-0{,}4186a)^2 = \underline{0{,}1752a^3}$$

$$\int_2^3 yz ds = \frac{a}{2} \cdot (-0{,}7557a + 0{,}2443a)(-0{,}4186a) = \underline{0{,}1070a^3}$$

$$\int_3^7 y^2 ds = \int_0^\pi (0{,}2443a + 0{,}5a \cdot \sin\phi)^2 \overbrace{ds}^{0{,}5ad\phi}$$

$$= 0{,}5 \cdot a^3 \int_0^\pi (0{,}0597 + 0{,}2443\sin\phi + 0{,}25\sin\phi^2) d\phi$$

$$= 0{,}5a^3 \cdot [0{,}0597\Big|_0^\pi \phi + 0{,}2443\Big|_0^\pi (-\cos\phi) + 0{,}25\Big|_0^\pi (\frac{\phi}{2} - \frac{\sin 2\phi}{4})]$$

$$= 0{,}5a^3 \cdot (0{,}0597 \cdot \pi a^2 + 0{,}2443a^2 \cdot 2 + 0{,}25a^2 \cdot \frac{\pi}{2}) = \underline{0{,}5344a^3}$$

$$\int_3^7 z^2 ds = \int_0^\pi (0{,}0814a - 0{,}5a \cdot \cos\phi)^2 \overbrace{ds}^{0{,}5ad\phi}$$

$$= 0{,}5 \cdot a^3 \int_0^\pi (0{,}0066 - 0{,}0814\cos\phi + 0{,}25\cos\phi^2) d\phi$$

$$= 0{,}5a^3 \cdot [0{,}0066\Big|_0^\pi \phi - 0{,}0814\Big|_0^\pi \sin\phi + 0{,}25\Big|_0^\pi (\frac{\phi}{2} + \frac{\sin 2\phi}{4})]$$

$$= 0{,}5a^3 \cdot (0{,}0066 \cdot \pi + 0{,}0814 \cdot 0 + 0{,}25 \cdot \frac{\pi}{2}) = \underline{0{,}2067a^3}$$

$$\int_3^7 yzds = \int_0^\pi (0,2443a + 0,5a\cdot\sin\phi)(0,0814a - 0,5a\cdot\cos\phi)\overbrace{ds}^{0,5ad\phi}$$

$$= 0,5\cdot a^3\int_0^\pi (0,0199 + 0,0407\sin\phi - 0,1222\cos\phi - 0,25\sin\phi\cos\phi)d\phi$$

$$= 0,5a^3\cdot(0,0199\Big|_0^\pi\phi - 0,0407\Big|_0^\pi\cos\phi - 0,1222\Big|_0^\pi\sin\phi - 0,25\Big|_0^\pi\frac{\sin^2\phi}{2})$$

$$= 0,5a^3\cdot[0,0199\cdot\pi - 0,0407\cdot(-2) - 0,1222\cdot 0 - 0,25\cdot 0] = \underline{0,0720a^3}$$

$$I_z = 2t\int_1^2 y^2ds + t\int_2^3 y^2ds + 2t\int_3^7 y^2ds = 2t\cdot 0,5711a^3 + t\cdot 0,1487a^3 + 2t\cdot 0,5344a^3$$

$$= \underline{\underline{2,360a^3t}}$$

$$I_y = 2t\int_1^2 z^2ds + t\int_2^3 z^2ds + 2t\int_3^7 z^2ds = 2t\cdot 0,0900a^3 + t\cdot 0,1752a^3 + 2t\cdot 0,2067a^3$$

$$= \underline{\underline{0,7686a^3t}}$$

$$I_{yz} = 2t\int_1^2 yzds + t\int_2^3 yzds + 2t\int_3^7 yzds = 2t\cdot(-0,0615a^3) + t\cdot 0,1070a^3 + 2t\cdot 0,0720a^3$$

$$= \underline{\underline{0,1280a^3t}}$$

Lasketaan sektoriaaliset tulomomentit:

$$I_{y\omega'_A} = \int y\omega'_A tds = 2t\int_1^2 y\omega_A ds + t\int_2^3 y\omega_A ds + 2t\int_3^7 y\omega_A ds,$$

$$I_{z\omega'_A} = \int z\omega'_A tds = 2t\int_1^2 z\omega_A ds + t\int_2^3 z\omega_A ds + 2t\int_3^7 z\omega_A ds.$$

Integraaleja:

$$\int_1^2 y\omega'_A ds = \frac{a}{2}(-0,7557a)\cdot(-a^2) = \underline{0,3779a^4}$$

$$\int_1^2 z\omega'_A ds = \frac{a}{6}(2\cdot 0,5814a - 0,4186a)(-a^2) = \underline{-0,1240a^4}$$

$$\int_2^3 y'\omega_A ds = \frac{a}{6}(-0,7557a + 2\cdot 0,2443a)0,5a^2 = \underline{-0,0223a^4}$$

$$\int_2^3 z'\omega_A ds = \frac{a}{2}(-0,4186a)0,5a^2 = \underline{-0,1046a^4}$$

$$\int_3^7 y\omega'_A ds = \int_0^\pi (0,2443a + 0,5a\cdot\sin\phi)(0,5 + 0,25\phi)a^2 0,5ad\phi$$

$$= 0,5a^4\int_0^\pi (0,1222 + 0,25\sin\phi + 0,0611\phi + 0,125\phi\sin\phi)d\phi$$

$$= 0,5a^4[0,1222\Big|_0^\pi\phi - 0,25\Big|_0^\pi\cos\phi + 0,0305\Big|_0^\pi\phi^2 + 0,125\Big|_0^\pi(\sin\phi - \phi\cos\phi)]$$

$$= 0,5a^4(0,1222\pi + 0,25\cdot 2 + 0,0305\pi^2 + 0,125\pi)$$

$$= \underline{0,7888a^4}$$

$$\int_3^7 z\omega'_A ds = \int_0^\pi (0,0814a - 0,5a\cdot\cos\phi)(0,5 + 0,25\phi)a^2 0,5ad\phi$$

$$= 0,5a^4\int_0^\pi (0,0407 - 0,25\cdot\cos\phi + 0,0203\phi - 0,125\phi\cos\phi)d\phi$$

$$= 0,5a^4[0,0407\Big|_0^\pi\phi - 0,25\Big|_0^\pi\sin\phi + 0,0102\Big|_0^\pi\phi^2 - 0,125\Big|_0^\pi(\cos\phi + \phi\sin\phi)]$$

$$= 0,5a^4[0,0407\pi - 0,25\cdot 0 + 0,0102\pi^2 - 0,125\cdot(-2)]$$

$$= \underline{0,2393a^4}$$

$$I_{y\omega'_A} = 2t\int_1^2 y\omega'_A ds + t\int_2^3 y\omega'_A ds + 2t\int_3^7 y\omega'_A ds$$

$$= 2t\cdot 0,3779a^4 + t\cdot(-0,0223a^4) + 2t\cdot 0,7888a^4$$

$$= \underline{\underline{2,311a^4t}},$$

$$I_{z\omega'_A} = 2t\int_1^2 z\omega'_A ds + t\int_2^3 z\omega'_A ds + 2t\int_3^7 z\omega'_A ds$$

$$= 2t\cdot(-0,1240a^4) + t\cdot(-0,1046a^4) + 2t\cdot 0,2393a^4$$

$$= \underline{\underline{0,1260a^4t}}.$$

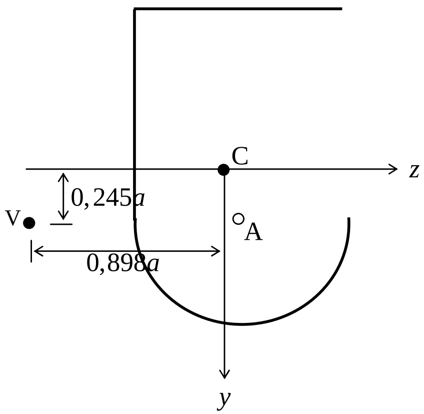
(e) Lasketaan vääntökeskiön koordinaatit:

$$y_V = y_A + \frac{I_z I_{z\omega'_A} - I_{yz} I_{y\omega'_A}}{I_y I_z - I_{yz}^2} = 0,2443a + \frac{2,360a^3t\cdot 0,1260a^4t - 0,1280a^3t\cdot 2,311a^4t}{0,7686a^3t\cdot 2,360a^3t - (0,1280a^3t)^2}$$

$$= \underline{\underline{0,2452a}}$$

$$z_V = z_A - \frac{I_y I_{y\omega'_A} - I_{yz} I_{z\omega'_A}}{I_y I_z - I_{yz}^2} = 0,0814a - \frac{0,7686a^3t\cdot 2,311a^4t - 0,1280a^4t\cdot 0,1260a^4t}{0,7686a^3t\cdot 2,360a^3t - (0,1280a^3t)^2}$$

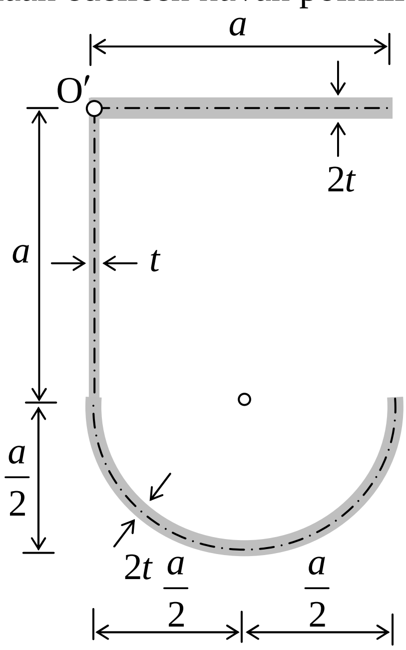
$$= \underline{\underline{-0,8978a}}$$


C
z
0,245a
V
A
0,898a
y

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2011

Kotitehtävä 2:

Tarkastellaan edelleen kuvan poikkileikkausta.



(a) Määritä poikkileikkauksen sektoriaalinen koordinaatti ω'_{V}, jonka nollapiste on O' ja napa on vääntökeskiö V, sekä piirrä ω'_{V} –kuvio.

(b) Määritä poikkileikkauksen sektoriaalinen staattinen momentti $S_{\omega'_{\mathrm{V}}}$.

(c) Määritä poikkileikkauksen normeerattu sektoriaalinen koordinaatti ω_{V}, jonka napa on vääntökeskiö V, sekä piirrä ω_{V} –kuvio.

(d) Määritä poikkileikkauksen sektoriaalinen jäyhyysmomentti $I_{\omega} \equiv I_{\omega_{\mathrm{V}}}$.

(e) Määritä osapoikkipinnan staattiset momentit $S_y(s)$ ja $S_z(s)$ sekä sektoriaalinen staattinen momentti $S_{\omega}(s) \equiv S_{\omega_{\mathrm{V}}}(s)$. Piirrä niiden kuvaajat.

Osittainen vastaus: (b) $S_{\omega'_{\mathrm{V}}} \approx -2{,}493a^3t$, (d) $I_{\omega} \approx 0{,}464a^5t$

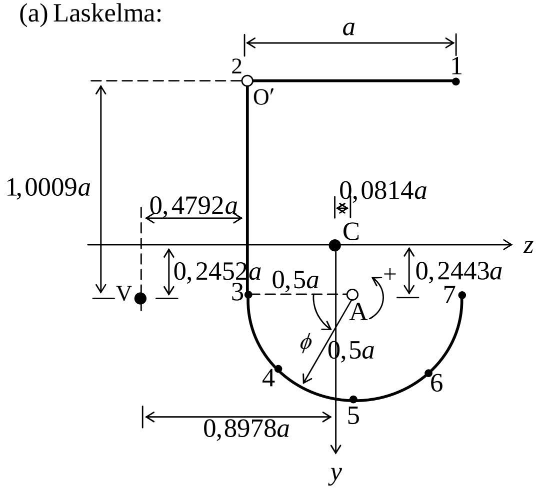
(e)	S_y	S_z	S_{ω}
Keskellä ylälaippaa	$-0{,}331a^2t$	$0{,}756a^2t$	$0{,}345a^3t$
Keskellä uumaa	$0{,}047a^2t$	$1{,}764a^2t$	$0{,}046a^3t$
Keskellä puoliympyrän kaarta	$0{,}628a^2t$	$0{,}884a^2t$	$0{,}320a^3t$

Palautus pe 23.9 klo 16.00 mennessä.

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2011

Kotitehtävän 2 ratkaisu:

(a) Laskelma:



Keskiviivan suorat osat:

$$\omega'_{V2} = 0$$

$$\omega'_{V1} = \omega'_{V2} - h_{12}\Delta s_{12} = 0 - 1{,}0009a \cdot a = -1{,}0009a^2$$

$$\omega'_{V3} = \omega'_{V2} - h_{23}\Delta s_{23} = 0 - 0{,}4792a \cdot a = -0{,}4792a^2$$

Sama laskeman voi tehdä myös napapisteen vaihtokaavalla seuraavasti:

$$\omega'_{Vi} = \omega'_{Ai} + (z_V - z_A)(y_i - y'_0) - (y_V - y_A)(z_i - z'_0)$$
$$= \omega'_{Ai} - 0{,}9792a \cdot (y_i - y'_0) - 0{,}0009a \cdot (z_i - z'_0)$$

i	ω'_{Ai}	$y_i - y'_0$	$z_i - z'_0$	ω'_{Vi}
1	$-a^2$	0	a	$-1{,}0009a^2$
2	0	0	0	0
3	$0{,}5a^2$	a	0	$-0{,}4792a^2$

Keskiviivan kaareva osa:

Tarvitaan analyyttinen lauseke. Sovelletaan napapisteen vaihtokaavaa

$$\omega'_V(\phi) = \omega'_A(\phi) + (z_V - z_A)[y(\phi) - y'_0] - (y_V - y_A)[z(\phi) - z'_0]$$
$$= \omega'_A(\phi) - 0{,}9792a[y(\phi) + 0{,}7557a] - 0{,}0009a[z(\phi) + 0{,}4186a]$$

Sijoitetaan tähän lausekkeet

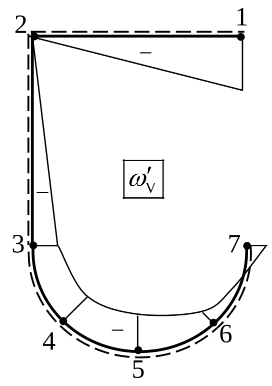
$$y(\phi) = (0{,}2443 + 0{,}5\sin\phi)a$$
$$z(\phi) = (0{,}0814 - 0{,}5\cos\phi)a$$
$$\omega'_A(\phi) = (0{,}5 + 0{,}25\phi)a^2$$

jolloin saadaan

$$\omega'_V(\phi) = (0{,}5 + 0{,}25\phi)a^2 - 0{,}9792(0{,}2443 + 0{,}5\sin\phi + 0{,}7557)a^2$$
$$- 0{,}0009(0{,}0814 - 0{,}5\cos\phi + 0{,}4186)a^2$$
$$= (0{,}5 + 0{,}25\phi - 0{,}2392 - 0{,}4896\sin\phi - 0{,}7400$$
$$- 0{,}0001 + 0{,}0004\cos\phi - 0{,}0004)a^2$$
$$= (-0{,}4797 + 0{,}25\phi - 0{,}4896\sin\phi + 0{,}0004\cos\phi)a^2$$

ω'_V – kuvio:

i	ω'_{Vi}
1	$-1{,}0009a^2$
2	0
3	$-0{,}4792a^2$
4	$-0{,}6293a^2$
5	$-0{,}5766a^2$
6	$-0{,}2372a^2$
7	$0{,}3053a^2$



(b) Sektoriaalinen staattinen momentti $S_{\omega'_{\mathrm{V}}}$

$$S_{\omega'_{\mathrm{V}}} = \int_A \omega'_{\mathrm{V}} dA = \int \omega'_{\mathrm{V}} t ds = 2t\int_1^2 \omega'_{\mathrm{V}} ds + t\int_2^3 \omega'_{\mathrm{V}} ds + 2t\int_3^7 \omega'_{\mathrm{V}} ds$$

$$= 2t \cdot \frac{1}{2} a(-1,0009a^2) + t \cdot \frac{1}{2} a(-0,4792a^2) + 2t\int_0^{\pi} \omega'_{\mathrm{V}}(\phi)\frac{a}{2} d\phi$$

$$= -1,0009a^3 t - 0,2396a^3 t + a^3 t\int_0^{\pi} (-0,4797 + 0,25\phi - 0,4896\sin\phi + 0,0004\cos\phi)a^2$$

$$= -1,2405a^3 t - 0,4797\Big|_0^{\pi}\phi + 0,125\Big|_0^{\pi}\phi^2 + 0,4896\Big|_0^{\pi}\cos\phi + 0,0004\Big|_0^{\pi}\sin\phi)a^3 t$$

$$= (-1,2405 - 0,4797\pi + 0,125\pi^2 - 0,4896 \cdot 2)a^3 t$$

$$= \underline{\underline{-2,4930a^3 t}}$$

(c) Normeeraus:

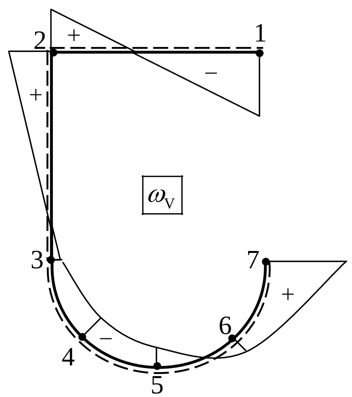
$$A = 2t \cdot a + t \cdot a + 2t \cdot \pi a / 2 = (3+\pi)at$$

$$\omega_{\mathrm{V}} = \omega'_{\mathrm{V}} - \frac{S_{\omega'_{\mathrm{V}}}}{A} = \omega'_{\mathrm{V}} - \frac{-2,4930a^3 t}{(3+\pi)at} = \omega'_{\mathrm{V}} + 0,4059a^2$$

$$= (-0,0738 + 0,25\phi - 0,4896\sin\phi + 0,0004\cos\phi)a^2$$

ω_{V} – kuvio:

i	$\omega_{\mathrm{V}i}$
1	$-0,5950a^2$
2	$0,4059a^2$
3	$-0,0734a^2$
4	$-0,2234a^2$
5	$-0,1707a^2$
6	$0,1688a^2$
7	$0,7112a^2$



(d) Sektoriaalinen jäyhyysmomentti:

$$I_{\omega} \equiv I_{\omega_{\mathrm{V}}} = \int_A \omega_{\mathrm{V}}^2 dA = \int \omega_{\mathrm{V}}^2 t ds = 2t\int_1^2 \omega_{\mathrm{V}}^2 ds + t\int_2^3 \omega_{\mathrm{V}}^2 ds + 2t\int_3^7 \omega_{\mathrm{V}}^2 ds$$

$$= 2t \cdot \frac{a}{3}[(-0,5950a^2)^2 - 0,5950a^2 \cdot 0,4059a^2 + (0,4059a^2)^2]$$

$$+ t \cdot \frac{a}{3}[(0,4059a^2)^2 + 0,4059a^2 \cdot (-0,0734a^2) + (-0,0734a^2)^2]$$

$$+ 2t\int_0^{\pi} \omega_{\mathrm{V}}^2 \frac{a}{2} d\phi$$

$$= (0,18484 + 0,04678)a^5 t + a^5 t\int_0^{\pi} (-0,0738 + 0,25\phi - 0,4896\sin\phi + 0,0004\cos\phi)^2 d\phi$$

$$= [0,23162 + \int_0^{\pi} (0,0054 + 0,0625\phi^2 + 0,2397\sin^2\phi - 0,0369\phi + 0,0723\sin\phi - 0,0001\cos\phi$$

$$- 0,2448\phi\sin\phi + 0,0002\phi\cos\phi - 0,0004\sin\phi\cos\phi)d\phi]a^5 t$$

$$= [0,23162 + 0,0054\Big|_0^{\pi}\phi + 0,0625\Big|_0^{\pi}\frac{\phi^3}{3} + 0,2397\Big|_0^{\pi}(\frac{\phi}{2} - \frac{\sin 2\phi}{4}) - 0,0369\Big|_0^{\pi}\frac{\phi^2}{2} - 0,0723\Big|_0^{\pi}\cos\phi$$

$$- 0,0001\Big|_0^{\pi}\sin\phi - 0,2448\Big|_0^{\pi}(\sin\phi - \phi\cos\phi) + 0,0002\Big|_0^{\pi}(\cos\phi + \phi\sin\phi) - 0,0004\Big|_0^{\pi}\frac{\sin^2\phi}{2}]a^5 t$$

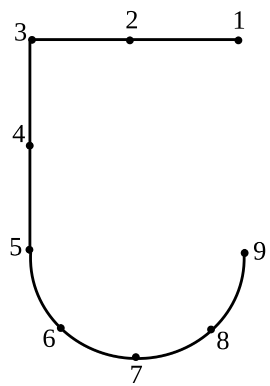
$$= (0,23162 + 0,0054\pi + 0,0625\frac{\pi^3}{3} + 0,2397\frac{\pi}{2} - 0,0369\frac{\pi^2}{2} + 0,0723 \cdot 2 - 0,2448\pi$$

$$- 0,0002 \cdot 2)a^5 t$$

$$= \underline{\underline{0,46411a^5 t}}$$

(e) Osapoikkipinnan staattiset momentit ja sektoriaalinen staattinen momentti:

Laskentapisteet:



Suureet keskiviivan suoralla osalla:

Välillä $i-1$ ja i saadaan kaavat

$$S_{yi} = S_{yi-1} - \int_{i-1}^{i} z(s) t_{i-1,i} ds = S_{yi-1} - \frac{1}{2}\Delta s_{i-1,i} t_{i-1,i}(z_{i-1} + z_i),$$

$$S_{zi} = S_{zi-1} - \int_{i-1}^{i} y(s) t_{i-1,i} ds = S_{zi-1} - \frac{1}{2}\Delta s_{i-1,i} t_{i-1,i}(y_{i-1} + y_i),$$

$$S_{\omega_V i} = S_{\omega_V i-1} - \int_{i-1}^{i} \omega_V(s) t_{i-1,i} ds = S_{yi-1} - \frac{1}{2}\Delta s_{i-1,i} t_{i-1,i}(\omega_{Vi-1} + \omega_{Vi}).$$

Pisteessä 1 $S_{y1} = S_{z1} = S_{\omega_V 1} = 0$. Kuvan jaolla $\Delta s = a/2$.

i	y_i	z_i	ω_{Vi}	S_{yi}	S_{zi}	$S_{\omega i}$
1	$-0,7557a$	$0,5814a$	$-0,5950a^2$	0	0	0
2	$-0,7557a$	$0,0814a$	$-0,0946a^2$	$-0,3314a^2t$	$0,7557a^2t$	$0,3448a^3t$
3	$-0,7557a$	$-0,4186a$	$0,4059a^2$	$-0,1628a^2t$	$1,5114a^2t$	$0,1892a^3t$
4	$-0,2557a$	$-0,4186a$	$0,1663a^2$	$0,0465a^2t$	$1,7643a^2t$	$0,0462a^3t$
5	$0,2443a$	$-0,4186a$	$-0,0734a^2$	$0,2558a^2t$	$1,7672a^2t$	$0,0230a^3t$

Suureet keskiviivan kaarevalla osalla:

$$S_y(s) = S_{y5} - \int_5^s z(s) 2t ds = S_{y5} - at\int_0^\phi z(\phi) d\phi$$

$$= S_{y5} - at\int_0^\phi (0,0814 - 0,5\cos\phi) a d\phi = S_{y5} - a^2 t(0,0814\Big|_0^\phi \phi - 0,5\Big|_0^\phi \sin\phi)$$

$$= (0,2558 - 0,0814\phi + 0,5\sin\phi)a^2 t$$

$$S_z(s) = S_{z5} - \int_5^s y(s) 2t ds = S_{z5} - at\int_0^\phi y(\phi) d\phi$$

$$= S_{z5} - at\int_0^\phi (0,2443 + 0,5\sin\phi) a d\phi = S_{z5} - a^2 t(0,2443\Big|_0^\phi \phi - 0,5\Big|_0^\phi \cos\phi)$$

$$= (1,2672 - 0,2443\phi + 0,5\cos\phi)a^2 t$$

$$S_\omega(s) = S_{\omega 5} - \int_5^s \omega_V(s) 2t ds = S_{\omega 5} - at\int_0^\phi \omega_V(\phi) d\phi$$

$$= S_{\omega 5} - at\int_0^\phi (-0,0738 + 0,25\phi - 0,4896\sin\phi + 0,0004\cos\phi) a^2 d\phi$$

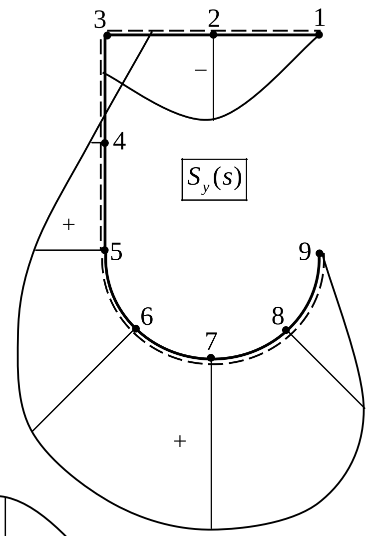
$$= S_{\omega 5} - a^3 t(-0,0738\Big|_0^\phi \phi + 0,125\Big|_0^\phi \phi^2 + 0,4896\Big|_0^\phi \cos\phi + 0,0004\Big|_0^\phi \sin\phi)$$

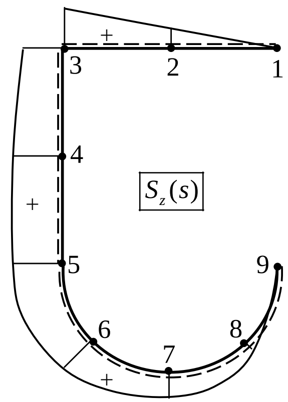
$$= S_{\omega 5} - a^3 t(-0,0738\phi + 0,125\phi^2 + 0,4896\cos\phi - 0,4896 + 0,0004\sin\phi)$$

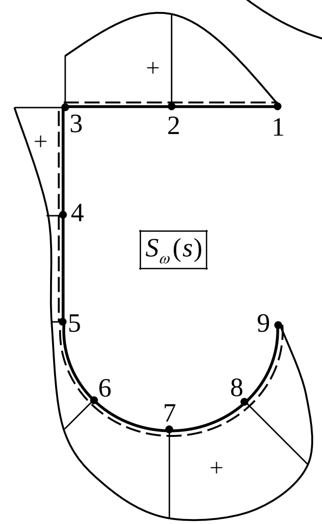
$$= (0,5126 + 0,0738\phi - 0,125\phi^2 - 0,4896\cos\phi - 0,0004\sin\phi)a^3 t$$

Laskelma:

i	S_{yi}	S_{zi}	$S_{\omega i}$
5	$0,2558a^2t$	$1,7672a^2t$	$0,0230a^3t$
6	$0,5454a^2t$	$1,4290a^2t$	$0,1470a^3t$
7	$0,6279a^2t$	$0,8835a^2t$	$0,3197a^3t$
8	$0,4176a^2t$	$0,3380a^2t$	$0,3384a^3t$
9	$0,0001a^3t$	$0,0003a^2t$	$0,0003a^3t$



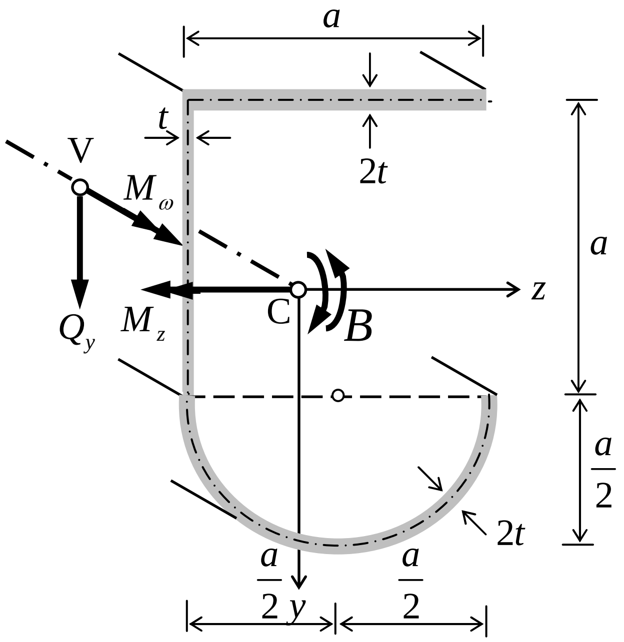




Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2011

Kotitehtävä 3:

Tarkastellaan palkkia, jolla on kotitehtävässä 1 käsitelty poikkileikkaus, jossa $a = 40\text{cm}$ ja $t = 1\text{cm}$. Palkin tarkasteltavassa poikkileikkauksessa vaikuttavat kuvan mukaiset jännitysresultantit.



$M_z = 220\text{kNm}$,
$B = 10\text{kNm}^2$,
$Q_y = 120\text{kN}$,
$M_\omega = 30\text{kNm}$,
$M_t = 5\text{kNm}$.

Määritä normaalijännityksen $\sigma_x(s)$ ja keskiviivan suuntaisen keskimääräisen leikkausjännityksen $\bar{\tau}_{xs}(s)$ jakautumakuviot pitkin poikkileikkauksen keskiviivaa sekä niiden suurimmat ja pienimmät arvot. Määritä vielä likiarvo poikkileikkauksen suurimmalle (kokonais-) leikkausjännitykselle sekä selvitä, missä kohdin poikkileikkausta se vaikuttaa.

Osittainen vastaus:

$\sigma_{x,\min} = -70{,}2\text{MPa}$, $\sigma_{x,\max} = 37{,}2\text{MPa}$

$\bar{\tau}_{xs,\min} = 0$, $\bar{\tau}_{xs,\max} = 27{,}4\text{MPa}$

$\tau_{xs,\max} \approx 48{,}5\text{MPa}$

Palautus pe 30.9 klo 16.00 mennessä.

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2011

Kotitehtävä 3 ratkaisu:

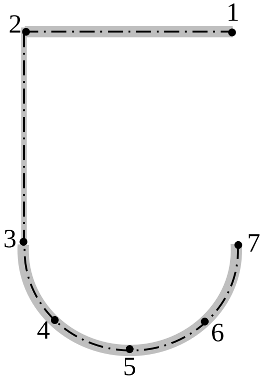
Tarvittavat tulokset kotitehtävistä 1 ja 2:

Poikkileikkaussuureet:

$$I_z = 2{,}360a^3t = 15{,}104 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4$$
$$I_y = 0{,}7686a^3t = 4{,}919 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4$$
$$I_{yz} = 0{,}1280a^3t = 0{,}819 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4$$
$$I_\omega = 0{,}46411a^5t = 4{,}752 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^5$$

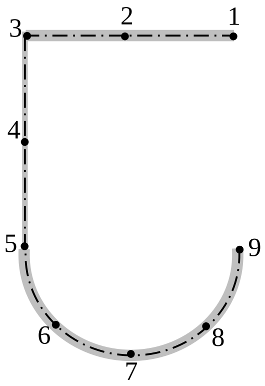
Koordinaatit $y(s)$ ja $z(s)$ sekä sektoriaalinen koordinaatti $\omega(s)$:

i	y_i [m]	z_i [m]	ω_{Vi} [m^2]
1	$-0{,}3023$	$0{,}2326$	$-0{,}0952$
2	$-0{,}3023$	$-0{,}1674$	$0{,}0649$
3	$0{,}0977$	$-0{,}1674$	$-0{,}0117$
4	$0{,}2392$	$-0{,}1089$	$-0{,}0357$
5	$0{,}2977$	$0{,}0326$	$-0{,}0273$
6	$0{,}2392$	$0{,}1740$	$0{,}0270$
7	$0{,}0977$	$0{,}2326a$	$0{,}1138$



Osapoikkipinnan staattiset momentit $S_y(s)$ ja $S_z(s)$ sekä sektoriaalinen staattinen momentti $S_\omega(s)$:

i	S_{yi} [m^3]	S_{zi} [m^3]	$S_{\omega i}$ [m^4]
1	0	0	0
2	$-0{,}530 \cdot 10^{-3}$	$1{,}209 \cdot 10^{-3}$	$2{,}143 \cdot 10^{-4}$
3	$-0{,}261 \cdot 10^{-3}$	$2{,}418 \cdot 10^{3}$	$1{,}211 \cdot 10^{-4}$
4	$0{,}074 \cdot 10^{-3}$	$2{,}823 \cdot 10^{-3}$	$0{,}296 \cdot 10^{-4}$
5	$0{,}409 \cdot 10^{-3}$	$2{,}828 \cdot 10^{-3}$	$0{,}147 \cdot 10^{-4}$
6	$0{,}873 \cdot 10^{-3}$	$2{,}286 \cdot 10^{3}$	$0{,}941 \cdot 10^{-4}$
7	$1{,}005 \cdot 10^{-3}$	$1{,}414 \cdot 10^{3}$	$2{,}046 \cdot 10^{-4}$
8	$0{,}668 \cdot 10^{-3}$	$0{,}541 \cdot 10^{-3}$	$2{,}166 \cdot 10^{-4}$
9	0	0	0



Normaalijännitykselle saadaan:

$$\sigma_x(s) = \frac{\overbrace{N}^{0}}{A} + \frac{I_y M_z - I_{yz}\overbrace{M_y}^{0}}{I_y I_z - I_{yz}^2}\,y(s) + \frac{I_z \overbrace{M_y}^{0} - I_{yz} M_z}{I_y I_z - I_{yz}^2}\,z(s) + \frac{B}{I_\omega}\,\omega(s)$$

$$= \frac{I_y M_z}{I_y I_z - I_{yz}^2}\,y(s) + \frac{-I_{yz} M_z}{I_y I_z - I_{yz}^2}\,z(s) + \frac{B}{I_\omega}\,\omega(s)$$

$$= \frac{4{,}919 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4 \cdot 220\,\mathrm{kNm}}{4{,}919 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4 \cdot 15{,}104 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4 - (0{,}819 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4)^2}\,y(s)$$

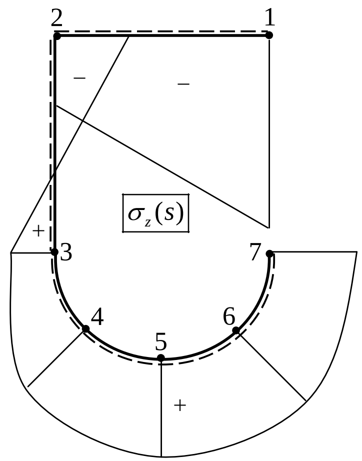
$$+ \frac{-0{,}819 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4 \cdot 220\,\mathrm{kNm}}{4{,}919 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4 \cdot 15{,}104 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4 - (0{,}819 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4)^2}\,z(s)$$

$$+ \frac{10\,\mathrm{kNm}^2}{4{,}752 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^6}\,\omega(s)$$

$$\underline{= [146{,}98\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^3}\,y(s) - 24{,}47\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^3}\,z(s) + 210{,}44\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^4}\,\omega(s)]}$$

Laskelma:

i	$\sigma_x(s_i)$ [kPa]
1	$-70{,}16$
2	$-26{,}68$
3	$15{,}99$
4	$30{,}31$
5	$37{,}21$
6	$36{,}58$
7	$32{,}62$



Pienin normaalijännitys on ylälaipan päässä (piste 1) ja suurin on kaarevan osan päässä (piste 5) ja niillä on arvot:

$$\underline{\underline{\sigma_{x,\min} = -70{,}2\,\mathrm{MPa},\ \sigma_{x,\max} = 37{,}2\,\mathrm{MPa}}}$$

Leikkausvuolle saadaan:

$$q(s)=\frac{I_yQ_y-I_{yz}\overbrace{Q_z}^{0}}{I_yI_z-I_{yz}^2}S_z(s)+\frac{I_z\overbrace{Q_z}^{0}-I_{yz}Q_y}{I_yI_z-I_{yz}^2}S_y(s)+\frac{M_\omega}{I_\omega}S_\omega(s)$$

$$=\frac{I_yQ_y}{I_yI_z-I_{yz}^2}S_z(s)+\frac{-I_{yz}Q_y}{I_yI_z-I_{yz}^2}S_y(s)+\frac{M_\omega}{I_\omega}S_\omega(s)$$

$$=\frac{4{,}919\cdot10^{-4}\mathrm{m}^4\cdot120\mathrm{kN}}{4{,}919\cdot10^{-4}\mathrm{m}^4\cdot15{,}104\cdot10^{-4}\mathrm{m}^4-(0{,}819\cdot10^{-4}\mathrm{m}^4)^2}S_z(s)$$

$$+\frac{-0{,}819\cdot10^{-4}\mathrm{m}^4\cdot120\mathrm{kN}}{4{,}919\cdot10^{-4}\mathrm{m}^4\cdot15{,}104\cdot10^{-4}\mathrm{m}^4-(0{,}819\cdot10^{-4}\mathrm{m}^4)^2}S_y(s)$$

$$+\frac{30\mathrm{kNm}}{4{,}752\cdot10^{-5}\mathrm{m}^6}S_\omega(s)$$

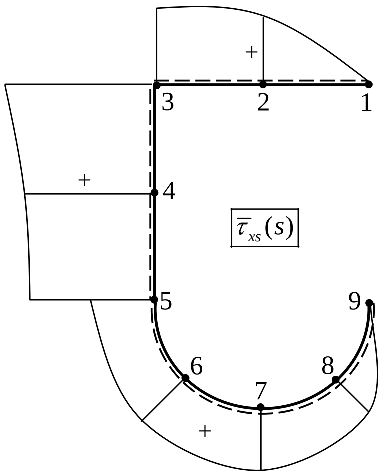
$$=[80{,}173\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^4}S_z(s)-13{,}349\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^4}S_y(s)+631{,}31\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^5}S_\omega(s)]\cdot10^3$$

Keskiviivan suuntainen leikkausjännitys:

$$\bar{\tau}_{xs}(s)=\frac{q(s)}{t(s)}$$

Laskelma:

i	$q(s_i)$ [MN/m]	$\bar{\tau}_{xs}(s_i)$ [MPa]
1	0	0
2	0,2393	11,97
3	0,2738	13,69 27,38
4	0,2440	24,40
5	0,2305	23,05 11,53
6	0,2310	11,55
7	0,2291	11,46
8	0,1712	8,56
9	0	0



Suurin keskiviivan suuntainen leikkausjännitys on uuman yläreunassa (piste 3):

$$\bar{\tau}_{xs,\min}=0,\ \bar{\tau}_{xs,\max}=27{,}4\mathrm{MPa}$$

Suurimman kokonaisleikkausjännityksen arviointi:

Vääntöjäyhyysmomentti:

$$I_t=\frac{1}{3}\sum t_i^3s_i=\frac{1}{3}[(2t)^3a+t^3a+(2t)^3\pi\frac{a}{2}]=\frac{1}{3}(9+4\pi)t^3a=\frac{1}{3}(9+4\pi)(0{,}01\mathrm{m})^3\cdot0{,}4\mathrm{m}$$

$$=2{,}876\cdot10^{-6}\mathrm{m}^4$$

Vääntövastus laipassa ja kaarevalla osalla *f* sekä uumassa *w*:

$$W_t^f=\frac{I_t}{2t}=\frac{2{,}876\cdot10^{-6}\mathrm{m}^4}{0{,}02\mathrm{m}}=1{,}438\cdot10^{-4}\mathrm{m}^3,$$

$$W_t^w=\frac{I_t}{t}=\frac{2{,}876\cdot10^{-6}\mathrm{m}^4}{0{,}01\mathrm{m}}=2{,}876\cdot10^{-4}\mathrm{m}^3.$$

Maksimi Saint Venant'in väännön leikkausjännitys laipassa ja kaarevalla osalla *f* sekä uumassa *w*:

$$\tau_{xs,f\max}^t=\frac{M_t}{W_t^f}=\frac{5\cdot10^{-3}\mathrm{MNm}}{1{,}438\cdot10^{-4}\mathrm{m}^3}=\underline{34{,}77\mathrm{MPa}}$$

$$\tau_{xs,w\max}^t=\frac{M_t}{W_t^w}=\frac{5\cdot10^{-3}\mathrm{MNm}}{2{,}876\cdot10^{-4}\mathrm{m}^3}=\underline{17{,}39\mathrm{MPa}}$$

Koska kokonaisleikkausjännitys on $\tau_{xs}=\bar{\tau}_{xs}+\tau_{xs}^t$, nähdään helposti, että suurin arvo saadaan joko laipassa tai uumassa lähellä pistettä 3.

Laipassa: $\tau_{xs,f\max}=\bar{\tau}_{xs,3f}+\tau_{xs,f\max}^t=13{,}69\mathrm{MPa}+34{,}77\mathrm{MPa}=\underline{48{,}46\mathrm{MPa}}$

Uumassa: $\tau_{xs,w\max}=\bar{\tau}_{xs,3w}+\tau_{xs,w\max}^t=27{,}38\mathrm{MPa}+17{,}39\mathrm{MPa}=44{,}77\mathrm{MPa}$

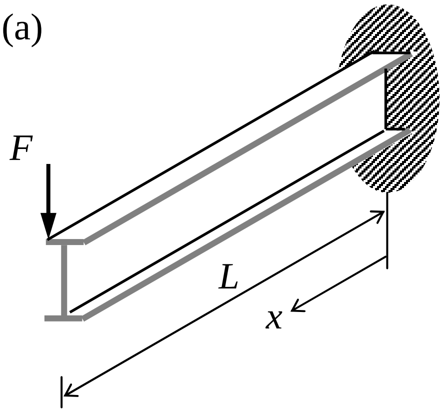
Arvio suurimalle kokonaisleikkausjännitykselle on siis: $\tau_{xs,\max}\approx48{,}5\mathrm{MPa}.$

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2011

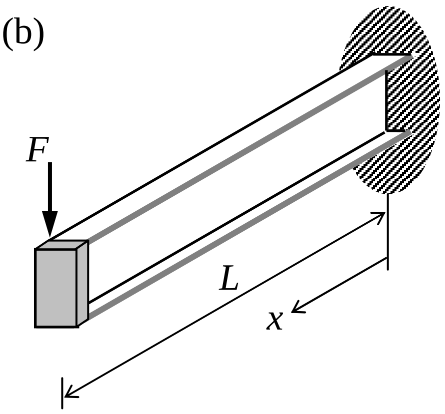
Kotitehtävä 4:

Määritä kuvan mukaisen ylälaipan nurkasta pystysuoralla pistekuormalla $F = 5\text{kN}$ kuormitetun ulokesauvan vääntökulma φ_t ulokkeen päässä sekä vääntömomenttien $M_\omega(x)$ ja $M_t(x)$ sekä bimomentin $B(x)$ jakautumakuviot (a) tapauksessa, jossa ulokkeen pää saa vapaasti käyristyä, ja (b) tapauksessa, jossa ulokkeen pään käyristyminen on estetty siihen hitsatulla jäykällä levyllä. Sauvan pituus on $L = 3\text{m}$ ja se on terästä, jonka kimmomoduuli on $E = 210000\text{N/mm}^2$ ja Poissonin vakio on $\nu = 0,3$.

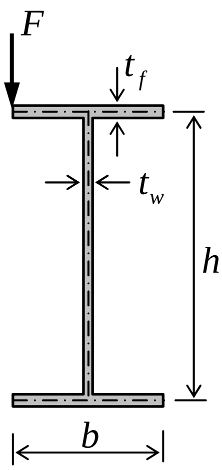
(a)



(b)



(c)



$b = 100\text{mm}$
$h = 191{,}5\text{mm}$
$t_f = 8{,}5\text{mm}$
$t_w = 5{,}6\text{mm}$

Osittainen vastaus ja tarkistusarvoja:

(a) $\varphi_t(L) \approx 0{,}1303\text{rad}$, $M_t(L) \approx 2{,}380 \cdot 10^5\,\text{Nmm}$,
$M_\omega(L) \approx 0{,}120 \cdot 10^5\,\text{Nmm}$, $B(0) \approx -2{,}009 \cdot 10^8\,\text{Nmm}^2$

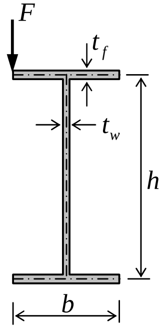
(b) $\varphi_t(L) \approx 0{,}0870\text{rad}$, $M_t(L) = 0$, $M_\omega(L) = 2{,}5 \cdot 10^5\,\text{Nmm}$,
$B(L) \approx 1{,}917 \cdot 10^8\,\text{Nmm}^2$

Palautus pe 7.10 klo 16.00 mennessä.

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2011

Kotitehtävän 4 ratkaisu:

Poikkileikkaussuureita:



$b = 100\text{mm}$
$h = 191{,}5\text{mm}$
$t_f = 8{,}5\text{mm}$
$t_w = 5{,}6\text{mm}$

$$I_t = \frac{1}{3}(2t_f^3 b + t_w^3 h) = 5{,}2152 \cdot 10^4\,\text{mm}\,,\ I_\omega = \frac{t_f h^2 b^3}{24} = 1{,}2988 \cdot 10^{10}\,\text{mm}^6$$

Kerroin k :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 0{,}80769 \cdot 10^5\,\text{N/mm}^2\,,\ k = L\sqrt{\frac{GI_t}{EI_\omega}} = 3{,}7282$$

Yksityisratkaisusuureet:

$$\varphi_{tm} = 0 \ \Rightarrow\ \theta_m = 0,\ B_m = 0,\ \text{jne.}$$

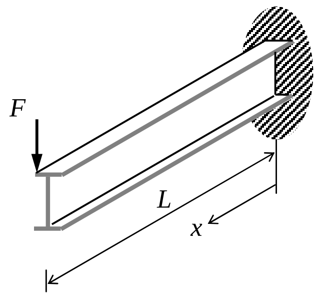
Vääntävä momentti sauvan päässä:

$$\bar{M} = F \cdot \frac{b}{2} = \frac{Fb}{2} = \frac{5000\,\text{N} \cdot 100\text{mm}}{2} = 2{,}5 \cdot 10^5\,\text{Nmm}$$

Ratkaisusuureet integrointivakioiden avulla:

$$\varphi_t(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \sinh(\frac{k}{L}x) + C_4 \cosh(\frac{k}{L}x)$$
$$\theta(x) = C_2 + C_3 \frac{k}{L}\cosh(\frac{k}{L}x) + C_4 \frac{k}{L}\sinh(\frac{k}{L}x)$$
$$M_t(x) = GI_t[C_2 + C_3 \frac{k}{L}\cosh(\frac{k}{L}x) + C_4 \frac{k}{L}\sinh(\frac{k}{L}x)]$$
$$B(x) = -GI_t[C_3 \sinh(\frac{k}{L}x) + C_4 \cosh(\frac{k}{L}x)]$$
$$M_\omega(x) = -GI_t[C_3 \frac{k}{L}\cosh(\frac{k}{L}x) + C_4 \frac{k}{L}\sinh(\frac{k}{L}x)]$$
$$M_x(x) = GI_t C_2$$

(a) Reunaehtojen huomiointi:



$$\varphi_t(0) \equiv C_1 + C_4 = 0,$$
$$\theta(0) \equiv C_2 + C_3 \frac{k}{L} = 0,$$
$$B(L) \equiv -GI_t(C_3 \sinh k + C_4 \cosh k) = 0,$$
$$M_x(L) \equiv GI_t C_2 = \bar{M}.$$

$$\Rightarrow\ C_1 = -\frac{L}{k}\frac{\bar{M}}{GI_t}\tanh k,\ C_2 = \frac{\bar{M}}{GI_t},\ C_3 = -\frac{L}{k}\frac{\bar{M}}{GI_t},\ C_4 = \frac{L}{k}\frac{\bar{M}}{GI_t}\tanh k$$

Ratkaisu:

$$\varphi_t(x) = \frac{\bar{M}L}{GI_t}[-\frac{\tanh k}{k} + \frac{x}{L} - \frac{1}{k}\sinh(\frac{k}{L}x) + \frac{\tanh k}{k}\cosh(\frac{k}{L}x)],$$
$$M_t(x) = \bar{M}[1 - \cosh(\frac{k}{L}x) + \tanh k \sinh(\frac{k}{L}x)],$$
$$B(x) = \frac{\bar{M}L}{k}[\sinh(\frac{k}{L}x) - \tanh k \cosh(\frac{k}{L}x)],$$
$$M_\omega(x) = \bar{M}[\cosh(\frac{k}{L}x) - \tanh k \sinh(\frac{k}{L}x)],$$

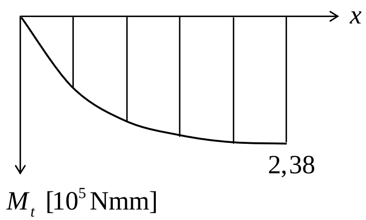
Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, kotilaskut

Vääntökulma palkin päässä:

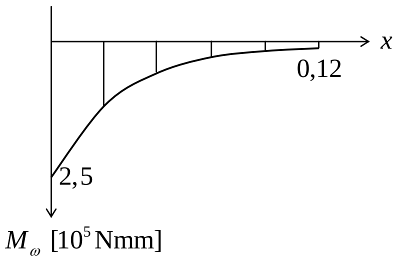
$$\varphi_t(L) = \frac{\bar{M}L}{GI_t}\left(1 - \frac{\tanh k}{k}\right) = \underline{\underline{0{,}1303\text{rad}}}$$

Vääntömomenttien ja bimomentin kuvaajat:

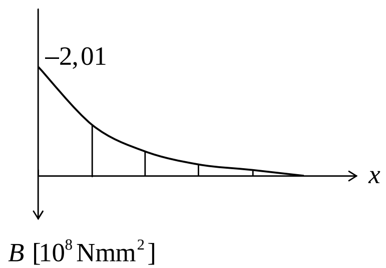
x [m]	M_t [Nmm]
0	0
0,6	$1{,}31 \cdot 10^5$
1,2	$1{,}93 \cdot 10^5$
1,8	$2{,}22 \cdot 10^5$
2,4	$2{,}34 \cdot 10^5$
3	$2{,}38 \cdot 10^5$



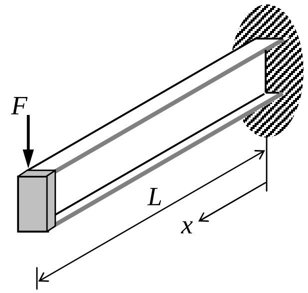
x [m]	M_ω [Nmm]
0	$2{,}5 \cdot 10^5$
0,6	$1{,}19 \cdot 10^5$
1,2	$0{,}57 \cdot 10^5$
1,8	$0{,}28 \cdot 10^5$
2,4	$0{,}16 \cdot 10^5$
3	$0{,}12 \cdot 10^5$



x [m]	B [Nmm^2]
0	$-2{,}01 \cdot 10^8$
0,6	$-0{,}95 \cdot 10^8$
1,2	$-0{,}45 \cdot 10^8$
1,8	$-0{,}20 \cdot 10^8$
2,4	$-0{,}08 \cdot 10^8$
3	0



(b) Reunaehtojen huomiointi:



$$\varphi_t(0) \equiv C_1 + C_4 = 0,$$

$$\theta(0) \equiv C_2 + C_3 \frac{k}{L} = 0,$$

$$\theta(L) \equiv C_2 + C_3 \frac{k}{L}\cosh k + C_4 \frac{k}{L}\sinh k = 0,$$

$$M_x(L) \equiv GI_t C_2 = \bar{M}.$$

$$\Rightarrow\ C_1 = -\frac{\bar{M}}{GI_t}\frac{L}{k}\frac{\cosh k - 1}{\sinh k},\ C_2 = \frac{\bar{M}}{GI_t},\ C_3 = -\frac{L}{k}\frac{\bar{M}}{GI_t},\ C_4 = \frac{\bar{M}}{GI_t}\frac{L}{k}\frac{\cosh k - 1}{\sinh k}$$

Ratkaisu:

$$\varphi_t(x) = \frac{\bar{M}L}{GI_t}\left\{\frac{x}{L} - \frac{1}{k}\sinh\left(\frac{k}{L}x\right) + \frac{\cosh k - 1}{k\sinh k}\left[\cosh\left(\frac{k}{L}x\right) - 1\right]\right\},$$

$$M_t(x) = \bar{M}\left[1 - \cosh\left(\frac{k}{L}x\right) + \frac{\cosh k - 1}{\sinh k}\sinh\left(\frac{k}{L}x\right)\right],$$

$$B(x) = \frac{\bar{M}L}{k}\left[\sinh\left(\frac{k}{L}x\right) - \frac{\cosh k - 1}{\sinh k}\cosh\left(\frac{k}{L}x\right)\right],$$

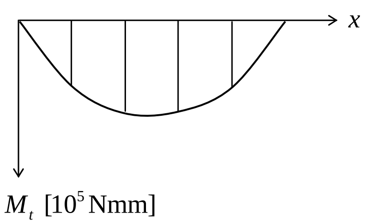
$$M_\omega(x) = \bar{M}\left[\cosh\left(\frac{k}{L}x\right) - \frac{\cosh k - 1}{\sinh k}\sinh\left(\frac{k}{L}x\right)\right],$$

Vääntökulma palkin päässä:

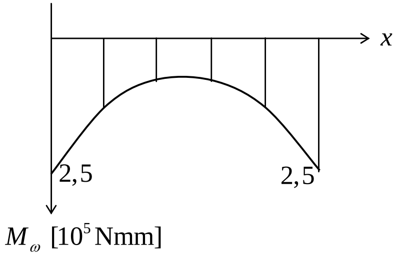
$$\varphi_t(L) = \frac{\bar{M}L}{GI_t}\left(1 + 2\frac{1 - \cosh k}{k\sinh k}\right) \approx \underline{\underline{0{,}0870\text{rad}}}$$

Vääntömomenttien ja bimomentin kuvaajat:

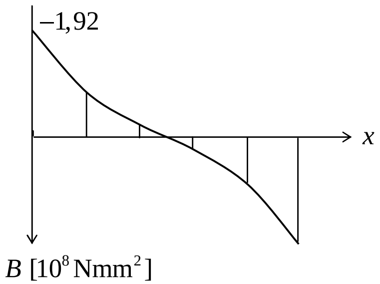
x [m]	M_t [Nmm]
0	0
0,6	$1,22 \cdot 10^5$
1,2	$1,69 \cdot 10^5$
1,8	$1,69 \cdot 10^5$
2,4	$1,22 \cdot 10^5$
3	0



x [m]	M_ω [Nmm]
0	$2,5 \cdot 10^5$
0,6	$1,28 \cdot 10^5$
1,2	$0,81 \cdot 10^5$
1,8	$0,81 \cdot 10^5$
2,4	$1,28 \cdot 10^5$
3	$2,5 \cdot 10^5$



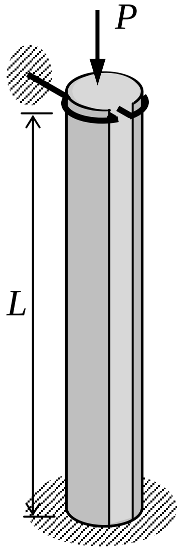
x [m]	B [Nmm^2]
0	$-1,92 \cdot 10^8$
0,6	$-0,83 \cdot 10^8$
1,2	$-0,23 \cdot 10^8$
1,8	$-0,23 \cdot 10^8$
2,4	$-0,83 \cdot 10^8$
3	$1,92 \cdot 10^8$

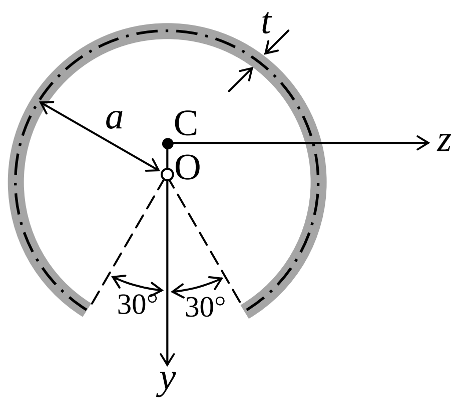


Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2011

Kotitehtävä 5:

Oheinen sauva on yläpäästään haarukkalaakeroitu ja alapäästään jäykästi kiinnitetty. Kuinka suurella keskeisen (poikkileikkauksen pintakeskiön C kohdalla vaikuttavan) puristavan kuorman P arvolla sauva nurjahtaa? Sauvan pituus on $L = 10a$, seinämien paksuus on $t = a/10$ ja kimmomoduuli on E ja Poissonin luku on $\nu = 0,25$.





Välituloksia:

$I_\omega \approx 0{,}192277a^6$, $y_V \approx -1{,}62300a$, $r^2 \approx 3{,}59765a^2$.

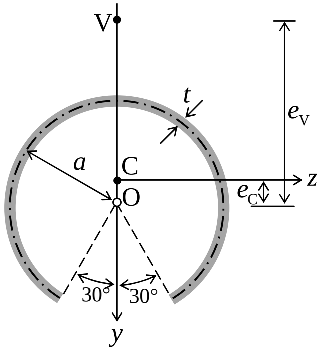
V*astaus:*

$P_{kr} \approx 0{,}009644Ea^2$.

Palautus pe 14.10 klo 16.00 mennessä.

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2011

Kotitehtävä 5 ratkaisu:



Kaavakokoelman taulukoita käyttäen saadaan poikkileikkaussuureita:

$$A = \frac{5}{3}\pi a \cdot t \approx 0,5,2360 at = 0,52360 a^2$$

$$e_C = \frac{\sin(\frac{5}{6}\pi)}{\frac{5}{6}\pi} a \approx 0,19099a$$

$$I_y = ta^3(\frac{5}{6}\pi - \sin 150° \cos 150°) \approx 3,0510 a^3 t = 0,30510 a^4$$

$$I_z = ta^3(\frac{5}{6}\pi + \sin 150° \cos 150° - 2\frac{\sin^2 150°}{\frac{5}{6}\pi}) \approx 1,9940 ta^3 = 0,19940 a^4$$

$$e_V = 2a \frac{\sin 150° - \frac{5\pi}{6}\cos 150°}{\frac{5\pi}{6} - \sin 150° \cos 150°} \approx 1,81399a$$

$$I_t = \frac{2}{3} t^3 a \frac{5}{6}\pi \approx 1,74533 at^3 = 0,00174533 a^4$$

$$I_\omega = \frac{2}{3} ta^5 [(\frac{5}{6}\pi)^3 - 6\frac{(\sin 150° - \frac{5\pi}{6}\cos 150°)^2}{\frac{5}{6}\pi - \sin 150° \cos 150°}] \approx 1,92277 a^5 t = 0,192277 a^6$$

$$y_V = -(e_V - e_C) \approx -1,62300a$$

$$r^2 = \frac{I_y + I_z}{A} + y_V^2 + z_V^2 = \frac{0,30510a^4 + 0,19940a^4}{0,52360a^2} + (-1,62300a)^2 \approx 3,59765a^2$$

Nurjahduspituus: $L_n = 0,70L = 7,0a$

Puhtaiden taivutus- ja vääntönurjahdustapausten kriittiset kuormat:

$$P_v = \frac{\pi^2 EI_z}{L_n^2} = \frac{\pi^2 E \cdot 0,19940a^4}{(7,0a)^2} \approx 0,040163Ea^2$$

$$P_w = \frac{\pi^2 EI_y}{L_n^2} = \frac{\pi^2 E \cdot 0,30510a^4}{(7,0a)^2} \approx 0,061453Ea^2$$

$$P_\varphi = \frac{1}{r^2}(\frac{\pi^2 EI_\omega}{L_n^2} + GI_t) = \frac{1}{3,59765a^2}[\frac{\pi^2 E \cdot 0,192277a^6}{(7,0a)^2} + \frac{E}{2(1+0,25)} \cdot 0,00174533a^4]$$

$$\approx 0,010959Ea^2$$

Ehto kriittiselle kuormalle:

$$\begin{vmatrix} P_v - P & 0 & -\overset{0}{\overbrace{z_V}} P \\ 0 & P_w - P & y_V P \\ -\overset{0}{\overbrace{z_V}} P & y_V P & r^2 P_\varphi - r^2 P \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} P_v - P & 0 & 0 \\ 0 & P_w - P & y_V P \\ 0 & y_V P & r^2(P_\varphi - P) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (P_v - P)[(P_w - P)r^2(P_\varphi - P) - y_V^2 P^2] = 0$$

$$\Rightarrow P = P_v,\ P^2 - \frac{P_w + P_\varphi}{1 - y_V^2 / r^2} P + \frac{P_w P_\varphi}{1 - y_V^2 / r^2} = 0$$

$$\Rightarrow P_1 = 0,040163Ea^2,$$

$$P^2 - \frac{0,061453Ea^2 + 0,010959Ea^2}{1-(-1,62300a)^2 / 3,59765a^2} P + \frac{0,061453Ea^2 \cdot 0,010959Ea^2}{1-(-1,62300a)^2 / 3,59765a^2} = 0$$

$$\Rightarrow P_1 \approx 0,040163Ea^2,\ P^2 - 0,270376P + 2,51462 \cdot 10^{-3} = 0$$

$$\Rightarrow P_1 = P_v \approx 0,040163Ea^2,\ P_2 \approx 0,260732Ea^2,\ P_3 \approx \underline{0,009644Ea^2}$$

Kriittinen kuorma: $P_{kr} = \underline{\underline{0,009644Ea^2}}$

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2011

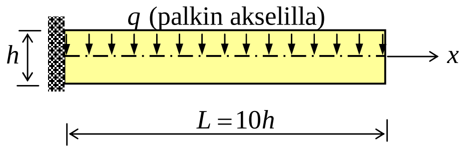
Kotitehtävä 6:

Voidaan osoittaa, että differentiaaliyhtälö (5.9), eli

$$(GI_t + 2\beta_y M_z^0)\varphi_t'' + 2\beta_y Q_y^0 \varphi_t' + [\frac{(M_z^0)^2}{EI_y} - q_y^0(y_q - y_{\mathrm{V}})]\varphi_t = 0,$$

soveltuu myös ulokepalkin kiepahdukseen, kun palkkia kuormittaa jakautunut kuorma $q_y^0(x)$. Reunaehtoyhtälö palkin vasemmassa, kiinnitetyssä päässä ($x = 0$) on $\varphi_t(0) = 0$ ja oikeassa, vapaassa päässä ($x = L$) on $\varphi_t'(L) = 0$.

Tarkastellaan oheista tasaisen kuorman q kuormittamaa ulokepalkkia, jonka poikkileikkaus on suorakaide, jonka korkeus on h. Määritä likilauseke palkin kiepahduskuormalle q_{kr} käyttäen differenssi-menetelmää ja differenssijakoa $\Delta x = L/3$. Määritä ja piirrä myös palkin kiepahdusmuoto $\varphi_t(x)$, joka saa arvon 1 ulokkeen päässä. Palkin pituus on $L = 10h$, leveys on $b = h/10$, kimmomoduuli on E, liukumoduuli on $G = 0,4E$.



Taustamateriaali:
Differenssimenetelmää käsittelevä liite LI_B.pdf sekä siihen liittyvät esimerkit EI_B.pdf, erityisesti esimerkki B7.

Ohjeita:
Muodosta kenttäyhtälöä vastaava differenssiyhtälö ja saata se muotoon

$$-\varphi_{ti-1} + 2\varphi_{ti} - \varphi_{ti+1} - \lambda f_i \varphi_{ti} = 0,$$

missä

$$\lambda = \frac{q^2 L^6}{EI_y GI_t}, \quad f_i = \frac{1}{4}\frac{\Delta x^2}{L^2}(1 - \frac{x_i}{L})^4.$$

Tässä tehtävässä voit tehdä differenssiverkon siten, että differenssipiste 1 on palkin vasemmassa päässä, piste 4 on palkin oikeassa päässä ja piste 5 on ulkoinen differenssipiste. Muodosta kenttäyhtälöä vastaavat differenssiyhtälöt verkon sisäpisteissä 2, 3 ja 4 ja reunaehtoa vastaavat yhtälöt differenssipisteissä 1 ja 4. Eliminoi jälkimmäisiä yhtälöitä

käyttäen pisteiden 1 ja 5 vääntökulmat φ_{t1} ja φ_{t5} edellisistä. Näin saat ominaisarvotehtävän, jonka pienimmän ominaisarvon $\lambda_{\min}$ joudut määrittämään. Sitä apuna käyttäen saat helposti kriittisen kuorman q_{kr}.

Osittainen vastaus: $q_{kr} \approx 1,378 \cdot 10^{-6} Eh$

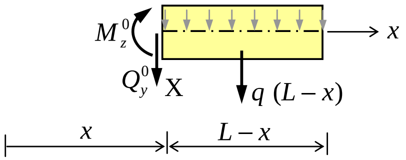
Palautus pe 21.10 klo 16.00 mennessä.

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2011

Kotitehtävän 6 ratkaisu:

Ratkaisu:

Taivutusmomentti M_z^0:



$$\mathrm{X}\circlearrowleft \quad M_z^0 + q(L-x)\cdot\frac{L-x}{2} = 0 \;\Rightarrow\; M_z^0 = \frac{qL^2}{2}(1-\frac{x}{L})^2$$

Kenttäyhtälö:

Yhtälöstä (5.6) saadaan

$$(GI_t + 2\overbrace{\beta_y}^{0} M_z^0)\varphi_t'' + 2\overbrace{\beta_y}^{0} Q_y^0\varphi_t' + [\frac{(M_z^0)^2}{EI_y} - \overbrace{q_y^0}^{q}(\overbrace{y_q}^{0} - \overbrace{y_V}^{0})]\varphi_t = 0$$

$$\Rightarrow\; \varphi_t'' + \frac{(M_z^0)^2}{EI_yGI_t}\varphi_t = 0 \;\Rightarrow\; \varphi_t'' + \frac{q^2L^4}{4GI_tEI_y}(1-\frac{x}{L})^4\varphi_t = 0$$

Kenttäyhtälöä vastaava differenssiyhtälö:

Saadaan

$$\varphi_{ti}'' + \frac{q^2L^4}{4EI_yGI_t}(1-\frac{x_i}{L})^4\varphi_{ti} = 0$$

$$\Rightarrow\; \frac{\varphi_{ti-1} - 2\varphi_{ti} + \varphi_{ti+1}}{\Delta x^2} + \frac{q^2L^4}{4EI_yGI_t}(1-\frac{x_i}{L})^4\varphi_{ti} = 0$$

$$\Rightarrow\; -\varphi_{ti-1} + 2\varphi_{ti} - \varphi_{ti+1} - \frac{q^2L^6}{EI_yGI_t}\frac{\Delta x^2}{4L^2}(1-\frac{x_i}{L})^4\varphi_{ti} = 0$$

ja edelleen

$$-\varphi_{ti-1} + 2\varphi_{ti} - \varphi_{ti+1} - \lambda f_i\varphi_{ti} = 0\,,$$

missä

$$\lambda = \frac{q^2L^6}{EI_yGI_t}$$

ja

$$f_i = \frac{\Delta x^2}{4L^2}(1-\frac{x_i}{L})^4 = \frac{1}{36}(1-\frac{x_i}{L})^4\,.$$

Kenttäyhtälö $\Rightarrow$

$$\begin{cases} -\varphi_{t1} + 2\varphi_{t2} - \varphi_{t3} - \lambda f_2\varphi_{t2} = 0 \\ -\varphi_{t2} + 2\varphi_{t3} - \varphi_{t4} - \lambda f_3\varphi_{t3} = 0 \\ -\varphi_{t3} + 2\varphi_{t4} - \varphi_{t5} - \lambda f_4\varphi_{t4} = 0 \end{cases}$$

missä

$$f_2 = \frac{1}{36}(1-\frac{1}{3})^4 = \frac{4}{729},\;\; f_3 = \frac{1}{36}(1-\frac{2}{3})^4 = \frac{1}{2916},\;\; f_4 = \frac{1}{36}(1-1)^4 = 0$$

Reunaehtoja vastaavat differenssiyhtälöt:

$$\varphi_{t1} = 0,$$

$$\varphi_{t4}' \equiv \frac{-\varphi_{t3} + \varphi_{t5}}{2\Delta x} = 0 \;\Rightarrow\; \varphi_{t5} = \varphi_{t3}$$

Reunaehtojen eliminointi $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 2\varphi_{t2} - \varphi_{t3} - \lambda f_2\varphi_{t2} = 0 \\ -\varphi_{t2} + 2\varphi_{t3} - \varphi_{t4} - \lambda f_3\varphi_{t3} = 0 \\ -2\varphi_{t3} + 2\varphi_{t4} - \lambda f_4\varphi_{t4} = 0 \end{cases}$$

Ominaisarvotehtävä:

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 4/729 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2916 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} \varphi_{t2} \\ \varphi_{t3} \\ \varphi_{t4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ratkaisu:

$\lambda_1 \approx 170{,}9,\ \lambda_2 \approx 3109{,}6,\ \lambda_3 \approx \infty$

Pienin ominaisarvo:

$\lambda_{\min} = \underline{170{,}9}$

Kriittinen kuorma:

$$\frac{q_{\mathrm{kr}}^2 L^6}{EI_y GI_t} = \lambda_{\min} \;\Rightarrow\; q_{\mathrm{kr}} = \sqrt{\lambda_{\min}}\frac{\sqrt{EI_y GI_t}}{L^3} \approx \underline{13{,}073\frac{\sqrt{EI_y GI_t}}{L^3}}$$

Poikkileikkaussuureet:

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{h(h/10)^3}{12} = \frac{h^4}{12000},\ I_t = \frac{1}{3}hb^3 = \frac{h(h/10)^3}{3} = \frac{h^4}{3000}$$

Kriittinen kuorma:

$$q_{kr} = 13{,}073\frac{\sqrt{E\frac{h^4}{12000}0{,}4E\frac{h^4}{3000}}}{(10h)^3} \approx \underline{\underline{1{,}378\cdot 10^{-6}Eh}}$$

Nurjahdusmuodon määrittäminen:

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} - 170{,}9\begin{bmatrix} 4/729 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2916 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} \varphi_{t2} \\ \varphi_{t3} \\ \varphi_{t4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1{,}062 & -1 & 0 \\ -1 & 1{,}941 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varphi_{t2} \\ \varphi_{t3} \\ \varphi_{t4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_{t2} = 1/1{,}0623\varphi_{t3} \\ \varphi_{t3} = \overbrace{\varphi_{t4}}^{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_{t2} = 0{,}941 \\ \varphi_{t3} = 1 \\ \varphi_{t4} = 1 \end{cases}$$

Vääntökulman kiepahdusmuoto: