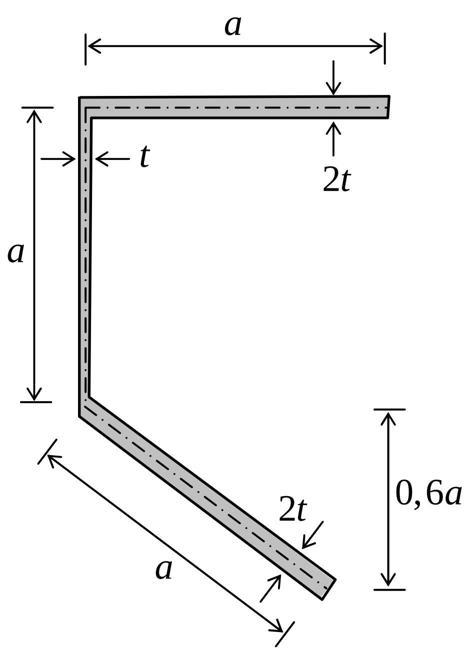
Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2010

Kotitehtävä 1:



Tarkastellaan kuvan poikkileikkausta.

(a) Määritä poikkileikkauksen pintakeskiön C etäisyydet e_y ja e_z uuman ja ylälaipan keskiviivoista.

(b) Valitse $y, z-$koordinaatistoksi pintakeskiökoordinaatisto ja piirrä poikkileikkauksen $y-$ ja $z-$kuviot.

(c) Määritä poikkileikkauksen sektoriaalinen koordinaatti ω'_{A}, jonka nollapiste O' on uuman ja ylälaipan leikkauspisteessä ja napa A on uuman ja alalaipan leikkauspisteessä, sekä piirrä ω'_{A} $-$kuvio.

(d) Määritä poikkileikkauksen jäyhyysmomentit I_y ja I_z, tulomomentti I_{yz} sekä sektoriaaliset tulomomentit $I_{y\omega'_{\mathrm{A}}}$ ja $I_{z\omega'_{\mathrm{A}}}$.

(e) Määritä poikkileikkauksen vääntökeskiön koordinaatit y_{V} ja z_{V}.

Osittainen vastaus:

$e_y = 0,62a,\ e_z = 0,36a$,

$I_y = 0,4454a^3t$, $I_z = 1,8513a^3t$, $I_{yz} = 0,0040a^3t$,

$I_{y\omega'_{\mathrm{A}}} = 0,62a^4t$, $I_{y\omega'_{\mathrm{B}}} = -0,3067a^4t$

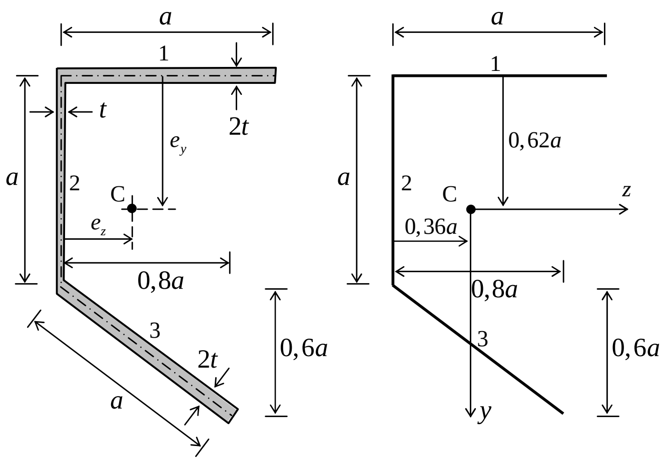
$y_{\mathrm{V}} = -0,3116a$, $z_{\mathrm{V}} = -0,6964a$

Palautus pe 17.9 klo 16.00 mennessä.

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2010

Kotitehtävän 1 ratkaisu:

(a)

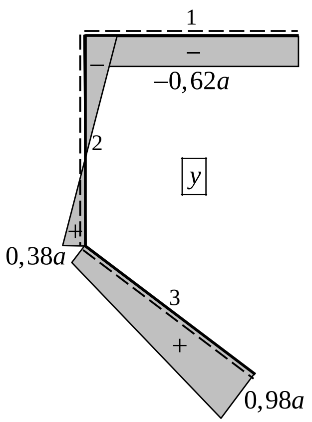


$$A = A_1 + A_2 + A_3 = a \cdot 2t + a \cdot t + a \cdot 2t = 5at$$

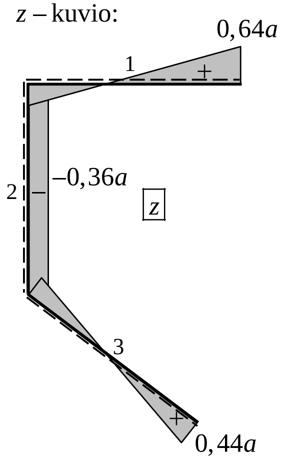
$$e_y = \frac{A_1 e_{y1} + A_2 e_{y2} + A_3 e_{y3}}{A} = \frac{2at \cdot 0 + at \cdot 0,5a + 2at \cdot 1,3a}{5at} = 0,62a$$

$$e_z = \frac{A_1 e_{z1} + A_2 e_{z2} + A_3 e_{z3}}{A} = \frac{2at \cdot 0,5a + at \cdot 0 + 2at \cdot 0,4a}{5at} = 0,36a$$

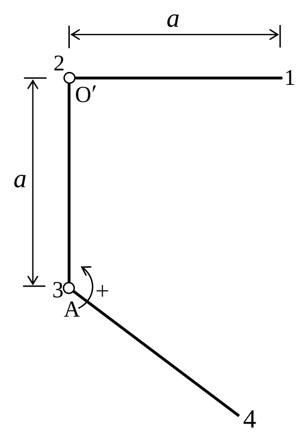
(b) y – kuvio:



z – kuvio:

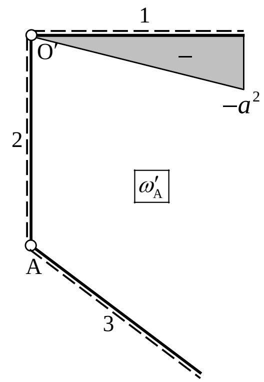


(c) Laskelma:

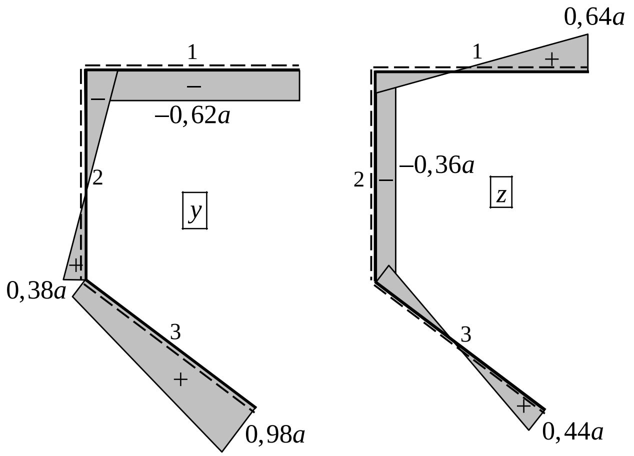


$$\omega'_{A2} = 0$$
$$\omega'_{A1} = \omega'_{A2} - h_{12}\Delta s_{12} = 0 - a \cdot a = -a^2$$
$$\omega'_{A3} = \omega'_{A2} + h_{23}\Delta s_{23} = 0$$
$$\omega'_{A4} = \omega'_{A3} + h_{34}\Delta s_{34} = 0$$

ω'_{A} – kuvio:



(d) Lasketaan jäyhyysmomentit ja tulomomentti:



$$I_z = \int y^2 t ds = 2t\int_1 y^2 ds + t\int_2 y^2 ds + 2t\int_3 y^2 ds$$

$$= 2t \cdot a \cdot (-0,62a)^2 + t \cdot \frac{a}{3} \cdot [(-0,62a)^2 - 0,62a \cdot 0,38a + (0,38a)^2]$$

$$+ 2t \cdot \frac{a}{3} \cdot [(0,38a)^2 + 0,38a \cdot 0,98a + (0,98a)^2] = (0,7688 + 0,0977 + 0,9848)a^3 t$$

$$= \underline{\underline{1,8513a^3 t}}$$

$$I_y = \int z^2 t ds = 2t\int_1 z^2 ds + t\int_2 z^2 ds + 2t\int_3 z^2 ds$$

$$= 2t \cdot \frac{a}{3}[(-0,36a)^2 - 0,36a \cdot 0,64a + (0,64a)^2] + t \cdot a \cdot (-0,36a)^2$$

$$+ 2t \cdot \frac{a}{3}[(-0,36a)^2 - t \cdot a \cdot 0,36a \cdot 0,44a + (0,44a)^2] = (0,2059 + 0,1296 + 0,1099)a^3 t$$

$$= \underline{\underline{0,4454a^3 t}}$$

$$I_{yz} = \int yzt ds = 2t\int_1 yz ds + t\int_2 yz ds + 2t\int_3 yz ds$$

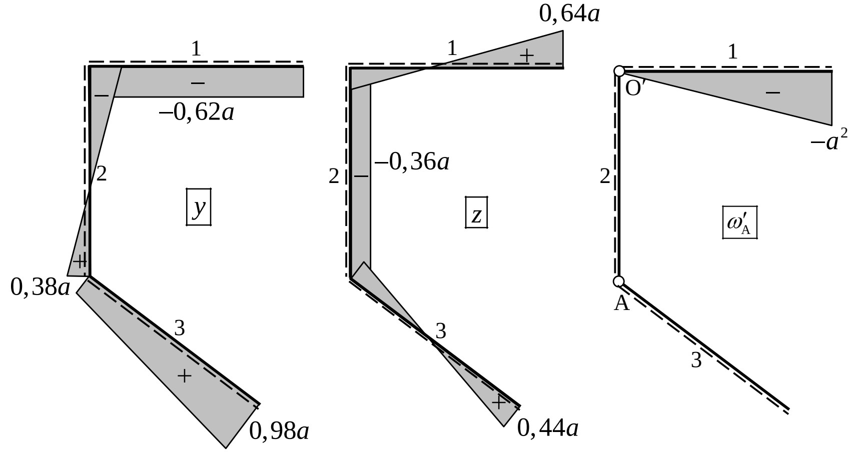
$$= 2t \cdot \frac{a}{2} \cdot (-0,36a + 0,64a)(-0,62a) + t \cdot \frac{a}{2} \cdot (-0,62a + 0,38a)(-0,36a)$$

$$+ 2t \cdot \frac{a}{6} \cdot \{0,38a \cdot [2 \cdot (-0,36a) + 0,44a] + 0,98a \cdot (-0,36a + 2 \cdot 0,44a)\}$$

$$= (-0,1736 + 0,0432 + 0,1344)a^3 t$$

$$= \underline{\underline{0,0040a^3 t}}$$

Lasketaan sektoriaaliset tulomomentit:



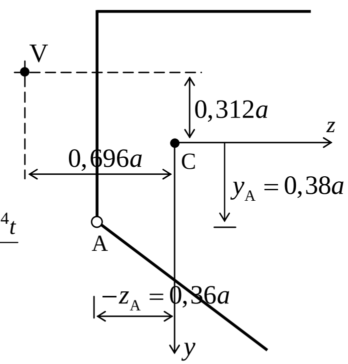
$$I_{y\omega'_A} = \int y\omega'_A t ds = 2t\int_1 y\omega'_A ds = 2t \cdot \frac{a}{2} \cdot (-0,62a) \cdot (-a^2)$$

$$= \underline{\underline{0,62a^4 t}}$$

$$I_{z\omega'_A} = \int z\omega'_A t ds = 2t\int_1 z\omega'_A ds = 2t \cdot \frac{a}{6} \cdot (-0,36a + 2 \cdot 0,64a) \cdot (-a^2)$$

$$= \underline{\underline{-0,3067a^4 t}}$$

(e) Lasketaan vääntökeskiön koordinaatit:



$$y_V = y_A + \frac{I_z I_{z\omega'_A} - I_{yz} I_{y\omega'_A}}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

$$= 0,38a + \frac{1,8513a^3 t \cdot (-0,3067a^4 t) - 0,0040a^3 t \cdot 0,62a^4 t}{0,4454a^3 t \cdot 1,8513a^3 t - (0,0040a^3 t)^2}$$

$$= \underline{\underline{-0,3116a}}$$

$$z_V = z_A - \frac{I_y I_{y\omega'_A} - I_{yz} I_{z\omega'_A}}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

$$= -0,36a - \frac{0,4454a^3 t \cdot 0,62a^4 t - 0,0040a^3 t \cdot (-0,3067a^4 t)}{0,4454a^3 t \cdot 1,8513a^3 t - (0,0040a^3 t)^2}$$

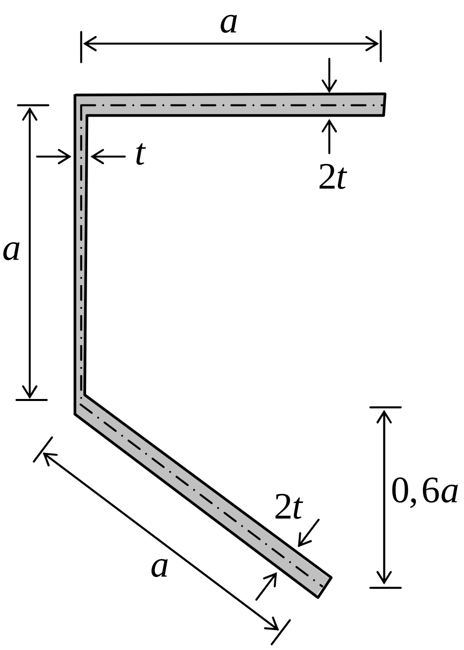
$$= \underline{\underline{-0,6964a}}$$

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, kotilaskut

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2010

Kotitehtävä 2:

Tarkastellaan edelleen kuvan poikkileikkausta.



(a) Määritä poikkileikkauksen sektoriaalinen koordinaatti ω'_{V}, jonka nollapiste on O' ja napa on vääntökeskiö V, sekä piirrä ω'_{V} – kuvio.

(b) Määritä poikkileikkauksen sektoriaalinen staattinen momentti $S_{\omega'_{\mathrm{V}}}$.

(c) Määritä poikkileikkauksen normeerattu sektoriaalinen koordinaatti ω_{V}, jonka napa on vääntökeskiö V, sekä piirrä ω_{V} – kuvio.

(d) Määritä poikkileikkauksen sektoriaalinen jäyhyysmomentti $I_{\omega} \equiv I_{\omega_{\mathrm{V}}}$.

(e) Määritä osapoikkipinnan staattiset momentit $S_y(s)$ ja $S_z(s)$ sekä osapoikkipinnan sektoriaalinen staattinen momentti $S_{\omega}(s) \equiv S_{\omega_{\mathrm{V}}}(s)$. Piirrä niiden kuvaajat.

Osittainen vastaus:

(b) $S_{\omega'_{\mathrm{V}}} = -0,7980a^3t$

(d) $I_{\omega} = 0,04600a^5t$

(e) Osapintojen staattisten momenttien ja sektoriaalisen staattisen momentin arvot uuman keskipisteessä $s = 1,5a$:

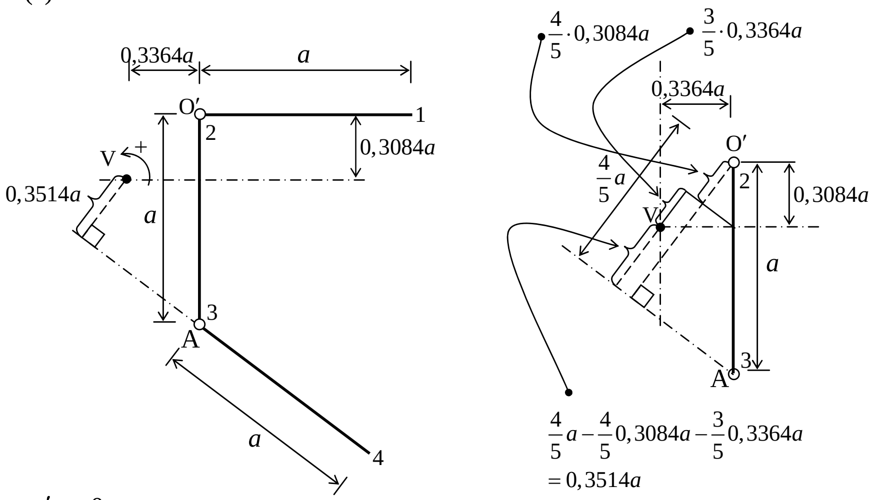
$S_z(1,5a) = 1,425a^2t,\ S_y(1,5a) = -0,10a^2t,\ S_{\omega}(1,5a) = -0,04855a^3t.$

Palautus pe 24.9 klo 16.00 mennessä.

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2010

Kotitehtävän 2 ratkaisu:

(a) Laskelma:



$$\omega'_{V2}=0$$

$$\omega'_{V1}=\omega'_{V2}-h_{12}\Delta s_{12}=0-0,3084a\cdot a=-0,3084a^2$$

$$\omega'_{V3}=\omega'_{V2}-h_{23}\Delta s_{23}=0-0,3364a\cdot a=-0,3364a^2$$

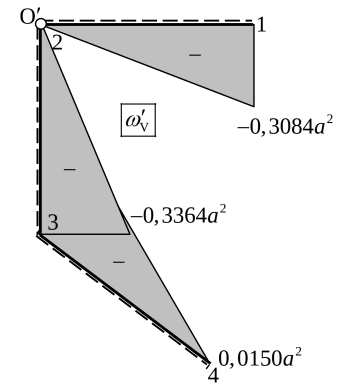
$$\omega'_{V4}=\omega'_{V3}+h_{34}\Delta s_{34}=-0,3364a^2+0,3514a\cdot a=0,0150a^2$$

Sama laskeman voi tehdä napapisteen vaihtokaavalla helpommin seuraavasti:

$$\omega'_{Vi}=\omega'_{Ai}+(z_V-z_A)(y_i-y'_0)-(y_V-y_A)(z_i-z'_0)$$
$$=\omega'_{Ai}-0,3364a\cdot(y_i-y'_0)+0,6916a\cdot(z_i-z'_0)$$

i	ω'_{Ai}	$y_i-y'_0$	$z_i-z'_0$	ω'_{Vi}
1	$-a^2$	0	a	$-0,3084a^2$
2	0	0	0	0
3	0	a	0	$-0,3364a^2$
4	0	$1,6a$	$0,8a$	$0,0150a^2$

ω'_V – kuvio:



(b) Sektoriaalinen staattinen momentti $S_{\omega'_V}$

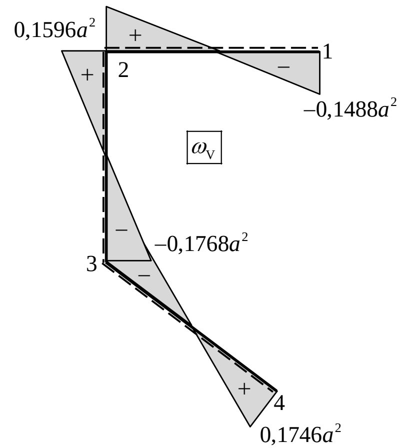
$$S_{\omega'_V}=\int_A\omega'_V dA=\int\omega'_V t ds=2t\int_1^2\omega'_V ds+t\int_2^3\omega'_V ds+2t\int_3^4\omega'_V ds$$
$$=2t\cdot\frac{1}{2}a(-0,3084a^2)+t\cdot\frac{1}{2}a(-0,3364a^2)+2t\cdot\frac{1}{2}a(-0,3364a^2+0,0150a^2)$$
$$=\underline{\underline{-0,7980a^3t}}$$

(c) Normeeraus:

$$A=2t\cdot a+t\cdot a+2t\cdot a=5at$$
$$\omega_V=\omega'_V-\frac{S_{\omega'_V}}{A}=\omega'_V-\frac{-0,7980a^3t}{5at}=\omega'_V+0,1596a^2$$

ω_V – kuvio:

i	ω_{Vi}
1	$-0,1488a^2$
2	$0,1596a^2$
3	$-0,1768a^2$
4	$0,1746a^2$



(c) Sektoriaalinen jäyhyysmomentti vääntökeskiön suhteen:

$$I_\omega \equiv I_{\omega_V} = \int_A \omega_V^2 dA = \int \omega_V^2 t ds = 2t\int_1^2 \omega_V^2 ds + t\int_2^3 \omega_V^2 ds + 2t\int_3^4 \omega_V^2 ds$$

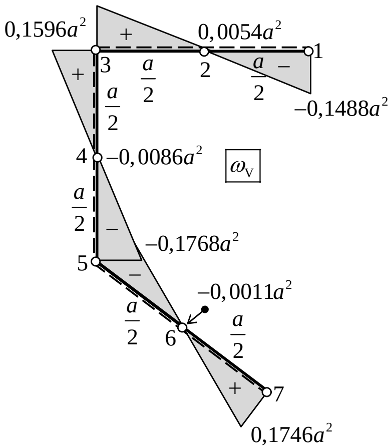
$$= 2t \cdot \frac{a}{3}[(-0{,}1488a^2)^2 - 0{,}1488a^2 \cdot 0{,}1596a^2 + (0{,}1596a^2)^2]$$

$$+ t \cdot \frac{a}{3}[(0{,}1596a^2)^2 + 0{,}1596a^2 \cdot (-0{,}1768a^2) + (-0{,}1768a^2)^2]$$

$$+ 2t \cdot \frac{a}{3}[(-0{,}1768a^2)^2 - 0{,}1768a^2 \cdot 0{,}1746a^2 + (0{,}1746a^2)^2]$$

$$= (0{,}015910 + 0{,}009504 + 0{,}020583)a^5 t = \underline{\underline{0{,}04600a^5 t}}$$

Osapoikkipinnan sektoriaalinen staattinen momentti $S_\omega(s)$:



$$S_{\omega 1} = 0$$

$$S_{\omega 2} = S_{\omega 1} - 2t\int_1^2 \omega_V ds = 0 - 2t \cdot \frac{1}{2}\frac{a}{2}(-0{,}1488a^2 + 0{,}0054a^2) = 0{,}0717a^3 t$$

$$S_{\omega 3} = S_{\omega 2} - 2t\int_2^3 \omega_V ds = 0{,}0717a^3 t - 2t \cdot \frac{1}{2}\frac{a}{2}(0{,}0054a^2 + 0{,}1596a^2) = -0{,}0108a^3 t$$

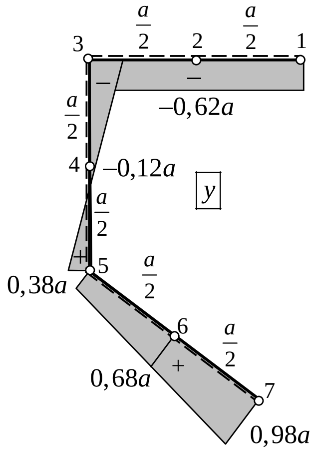
$$S_{\omega 4} = S_{\omega 3} - t\int_3^4 \omega_V ds = -0{,}0108a^3 t - t \cdot \frac{1}{2}\frac{a}{2}(0{,}1596a^2 - 0{,}0086a^2) = -0{,}04855a^3 t$$

$$S_{\omega 5} = S_{\omega 4} - t\int_4^5 \omega_V ds = -0{,}04855a^3 t - t \cdot \frac{1}{2}\frac{a}{2}(-0{,}0086a^2 - 0{,}1768a^2) = -0{,}00220a^3 t$$

$$S_{\omega 6} = S_{\omega 5} - 2t\int_5^6 \omega_V ds = -0{,}00220a^3 t - 2t \cdot \frac{1}{2}\frac{a}{2}(-0{,}1768a^2 - 0{,}0011a^2) = 0{,}0865a^3 t$$

$$S_{\omega 7} = S_{\omega 6} - 2t\int_6^7 \omega_V ds = 0{,}08675a^3 t - 2t \cdot \frac{1}{2}\frac{a}{2}(-0{,}0011a^2 + 0{,}1746a^2) = 0$$

Osapoikkipinnan staattinen momentti $S_z(s)$:



$$S_{z1} = 0$$

$$S_{z2} = S_{z1} - 2t\int_1^2 y ds = 0 - 2t \cdot \frac{a}{2}(-0{,}62a) = 0{,}62a^2 t$$

$$S_{z3} = S_{z2} - 2t\int_2^3 y ds = 0{,}62a^2 t - 2t \cdot \frac{a}{2}(-0{,}62a) = 1{,}24a^2 t$$

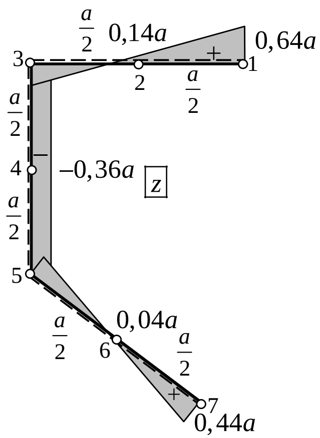
$$S_{z4} = S_{z3} - t\int_3^4 y ds = 1{,}24a^2 t - t \cdot \frac{1}{2}\frac{a}{2}(-0{,}62a - 0{,}12a) = 1{,}425a^2 t$$

$$S_{z5} = S_{z4} - t\int_4^5 y ds = 1{,}425a^2 t - t \cdot \frac{1}{2}\frac{a}{2}(-0{,}12a + 0{,}38a) = 1{,}36a^2 t$$

$$S_{z6} = S_{z5} - 2t\int_5^6 y ds = 1{,}36a^2 t - 2t \cdot \frac{1}{2}\frac{a}{2}(0{,}38a + 0{,}68a) = 0{,}83a^2 t$$

$$S_{z7} = S_{z6} - 2t\int_6^7 y ds = 0{,}83a^2 t - 2t \cdot \frac{1}{2}\frac{a}{2}(0{,}68a + 0{,}98a) = 0$$

Osapoikkipinnan staattinen momentti $S_y(s)$:



$$S_{y1} = 0$$

$$S_{y2} = S_{y1} - 2t\int_1^2 z ds = 0 - 2t \cdot \frac{1}{2}\frac{a}{2}(0{,}64a + 0{,}14a) = -0{,}39a^2 t$$

$$S_{y3} = S_{y2} - 2t\int_2^3 z ds = -0{,}39a^2 t - 2t \cdot \frac{1}{2}\frac{a}{2}(0{,}14a - 0{,}36a) = -0{,}28a^2 t$$

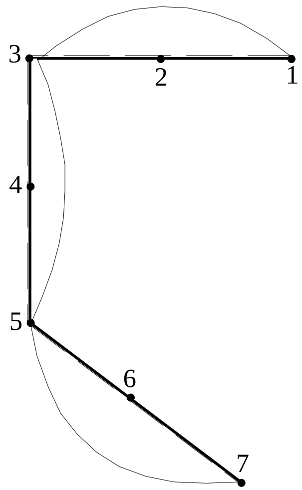
$$S_{y4} = S_{y3} - t\int_3^4 z ds = -0{,}28a^2 t - t \cdot \frac{a}{2}(-0{,}36a) = -0{,}10a^2 t$$

$$S_{y5} = S_{y4} - t\int_4^5 z ds = -0{,}10a^2 t - t \cdot \frac{a}{2}(-0{,}36a) = 0{,}08a^2 t$$

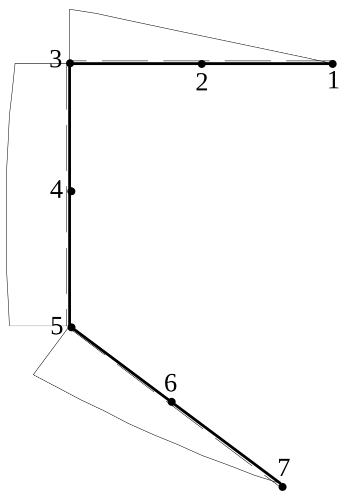
$$S_{y6} = S_{y5} - 2t\int_5^6 z ds = 0{,}08a^2 t - 2t \cdot \frac{1}{2}\frac{a}{2}(-0{,}36a + 0{,}04a) = 0{,}24a^2 t$$

$$S_{y7} = S_{y6} - 2t\int_6^7 z ds = 0{,}24a^2 t - 2t \cdot \frac{1}{2}\frac{a}{2}(0{,}04a + 0{,}44a) = 0$$

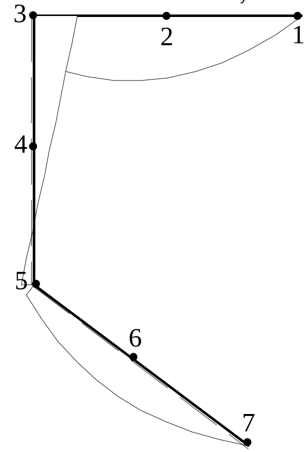
Sektoriaalinen staattinen momentti S_ω



Staattinen momentti S_z



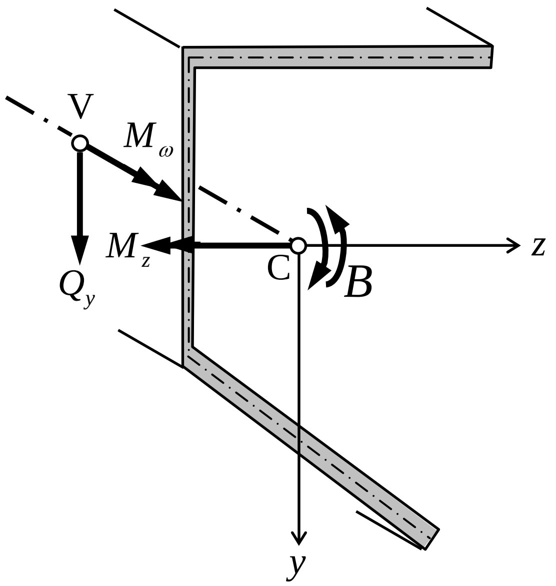
Staattinen momentti S_y



Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2010

Kotitehtävä 3:

Tarkastellaan palkkia, jolla on kotitehtävässä 1 käsitelty poikkileikkaus, jossa $a = 40\text{cm}$ ja $t = 1\text{cm}$. Palkin tarkasteltavassa poikkileikkauksessa vaikuttavat kuvan mukaiset jännitysresultantit.



$M_z = 250\text{kNm}$,
$B = 5\text{kNm}^2$,
$Q_y = 150\text{kN}$,
$M_\omega = 25\text{kNm}$,
$M_t = 5\text{kNm}$.

Määritä normaalijännityksen $\sigma_x(s)$ ja keskiviivan suuntaisen keskimääräisen leikkausjännityksen $\overline{\tau}_{xs}(s)$ jakautumakuviot pitkin poikkileikkauksen keskiviivaa sekä niiden itseisarvoltaan suurimmat arvot. Määritä vielä likiarvo poikkileikkauksen suurimmalle (kokonais-) leikkausjännitykselle sekä selvitä, missä kohdin poikkileikkausta se vaikuttaa.

Osittainen vastaus:

$\sigma_{x,\max} = 112{,}0\text{MPa}$

$\overline{\tau}_{xs,\max} = 26{,}8\text{MPa}$

$\tau_{xs,\max} \approx 67{,}2\text{MPa}$

Palautus pe 1.10 klo 16.00 mennessä.

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2010

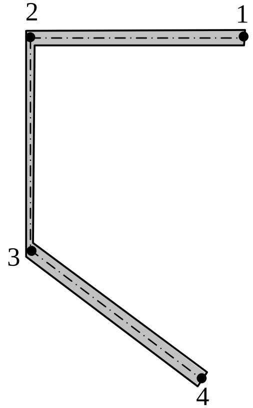
Kotitehtävä 3 ratkaisu:

Tarvittavat tulokset kotitehtävistä 1 ja 2:

Poikkileikkaussuureet:

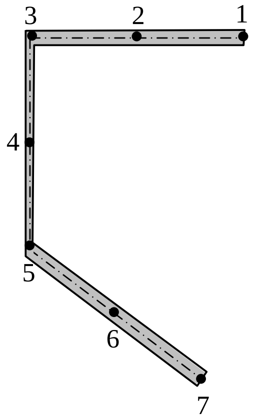
$$
\begin{aligned}
I_y &= 0,4454a^3t = 2,851\cdot10^{-4}\,\mathrm{m}^4,\\
I_z &= 1,8513a^3t = 11,848\cdot10^{-4}\,\mathrm{m}^4,\\
I_{yz} &= 0,0040a^3t = 0,0256\cdot10^{-4}\,\mathrm{m}^4,\\
I_\omega &= 0,04600a^5t = 4,7104\cdot10^{-6}\,\mathrm{m}^6.
\end{aligned}
$$

Koordinaatit $y(s)$ ja $z(s)$ sekä sektoriaalinen koordinaatti $\omega(s)$:



i	$y(s_i)$ [m]	$z(s_i)$ [m]	$\omega(s_i)$ [m^2]
1	-0,248	0,256	-0,023808
2	-0,248	-0,144	0,025536
3	0,152	-0,144	-0,028288
4	0,392	0,176	0,027936

Osapoikkipinnan staattiset momentit $S_y(s)$ ja $S_z(s)$ sekä sektoriaalinen staattinen momentti $S_\omega(s)$:



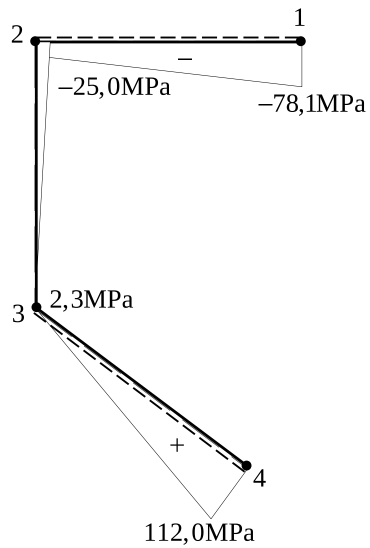
i	$S_y(s_i)$ [m^3]	$S_z(s_i)$ [m^3]	$S_\omega(s_i)$ [m^4]
1	0	0	0
2	$-0,624\cdot10^{-3}$	$0,992\cdot10^{-3}$	$4,5888\cdot10^{-5}$
3	$-0,448\cdot10^{-3}$	$1,984\cdot10^{-3}$	$-0,6912\cdot10^{-5}$
4	$-0,16\cdot10^{-3}$	$2,28\cdot10^{-3}$	$-3,1072\cdot10^{-5}$
5	$0,128\cdot10^{-3}$	$2,176\cdot10^{-3}$	$-0,1408\cdot10^{-5}$
6	$0,384\cdot10^{-3}$	$1,328\cdot10^{-3}$	$5,536\cdot10^{-5}$
7	0	0	0

Normaalijännitykselle saadaan:

$$
\begin{aligned}
\sigma_x(s) &= \frac{\overset{0}{\overbrace{N}}}{A} + \frac{I_yM_z - I_{yz}\overset{0}{\overbrace{M_y}}}{I_yI_z - I_{yz}^2}y(s) + \frac{I_z\overset{0}{\overbrace{M_y}} - I_{yz}M_z}{I_yI_z - I_{yz}^2}z(s) + \frac{B}{I_\omega}\omega(s)\\
&= \frac{I_yM_z}{I_yI_z - I_{yz}^2}y(s) + \frac{-I_{yz}M_z}{I_yI_z - I_{yz}^2}z(s) + \frac{B}{I_\omega}\omega(s)\\
&= \frac{2,851\cdot10^{-4}\mathrm{m}^4\cdot 250\mathrm{kNm}}{2,851\cdot10^{-4}\mathrm{m}^4\cdot 11,848\cdot10^{-4}\mathrm{m}^4 - (0,0256\cdot10^{-4}\mathrm{m}^4)^2}y(s)\\
&+ \frac{-0,0256\cdot10^{-4}\mathrm{m}^4\cdot 250\mathrm{kNm}}{2,851\cdot10^{-4}\mathrm{m}^4\cdot 11,848\cdot10^{-4}\mathrm{m}^4 - (0,0256\cdot10^{-4}\mathrm{m}^4)^2}z(s)\\
&+ \frac{5\mathrm{kNm}^2}{4,7104\cdot10^{-6}\mathrm{m}^6}\omega(s)\\
&= \underline{2,1101\cdot10^5\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^3}y(s) - 1,8947\cdot10^3\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^3}z(s) + 1,0615\cdot10^6\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^4}\omega(s)}
\end{aligned}
$$

Laskelma:

i	$\sigma_x(s_i)$ [MPa]
1	$-78,09$
2	$-24,95$
3	2,32
4	112,04



Suurin normaalijännitys on alalaipan oikeassa päässä ja sillä on arvo:

$$\underline{\underline{\sigma_{x,\max} = 112,0\mathrm{MPa}}}$$

Leikkausvuolle saadaan:

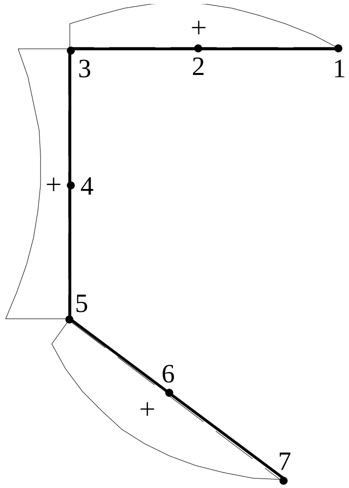
$$
\begin{aligned}
q(s) &= \frac{I_y Q_y - I_{yz} \overbrace{Q_z}^{0}}{I_y I_z - I_{yz}^2} S_z(s) + \frac{I_z \overbrace{Q_z}^{0} - I_{yz} Q_y}{I_y I_z - I_{yz}^2} S_y(s) + \frac{M_\omega}{I_\omega} S_\omega(s) \\
&= \frac{I_y Q_y}{I_y I_z - I_{yz}^2} S_z(s) + \frac{-I_{yz} Q_y}{I_y I_z - I_{yz}^2} S_y(s) + \frac{M_\omega}{I_\omega} S_\omega(s) \\
&= \frac{2{,}851 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4 \cdot 150\,\mathrm{kN}}{2{,}851 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4 \cdot 11{,}848 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4 - (0{,}0256 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4)^2} S_z(s) \\
&\quad + \frac{-0{,}0256 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4 \cdot 150\,\mathrm{kN}}{2{,}851 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4 \cdot 11{,}848 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4 - (0{,}0256 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4)^2} S_y(s) \\
&\quad + \frac{25\,\mathrm{kNm}}{4{,}7104 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^6} S_\omega(s) \\
&= 1{,}2661 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^4} S_z(s) - 1{,}1368 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^4} S_y(s) + 5{,}3074 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^5} S_\omega(s)
\end{aligned}
$$

Keskiviivan suuntaiselle keskimääräiselle leikkausjännitykselle saadaan:

$$
\bar{\tau}_{xs}(s) = \frac{q(s)}{t(s)} = 1{,}2661 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^5} \frac{S_z(s)}{t(s)} + 1{,}1368 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^5} \frac{S_y(s)}{t(s)} + 5{,}3074 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^6} \frac{S_\omega(s)}{t(s)}
$$

Laskelma:

i	$\bar{\tau}_{xs}(s_i)$ [MPa]
1	0
2	18,49
3	10,75 21,50
4	12,39
5	26,79 13,39
6	23,08
7	0



Suurin keskiviivan suuntainen keskimääräinen leikkausjännitys on uuman alapäässä ja sillä on arvo:

$$
\underline{\underline{\bar{\tau}_{xs,\max} = 26{,}8\,\mathrm{MPa}}}
$$

<u>Suuriman kokonaisleikkausjännityksen arviointi:</u>

Vääntöjäyhyysmomentti:

$$
\begin{aligned}
I_t &= \frac{1}{3}\sum t_i^3 s_i = \frac{1}{3}[(2t)^3 a + t^3 a + (2t)^3 a] = \frac{17}{3} t^3 a = \frac{17}{3}(0{,}01\mathrm{m})^3 \cdot 0{,}4\mathrm{m} \\
&= 2{,}2667 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^4
\end{aligned}
$$

Vääntövastukset laipoissa ja uumassa:

$$
\begin{aligned}
W_t^f &= \frac{I_t}{2t} = \frac{2{,}2667 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^4}{0{,}02\,\mathrm{m}} = 1{,}1333 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^3, \\
W_t^w &= \frac{I_t}{t} = \frac{2{,}2667 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^4}{0{,}01\,\mathrm{m}} = 2{,}2667 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^3.
\end{aligned}
$$

Maksimi Saint Venantin väännön leikkausjännitys laipoissa ja uumassa:

$$
\begin{aligned}
\tau_{xs,f\max}^t &= \frac{M_t}{W_t^f} = \frac{5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{MNm}}{1{,}1333 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^3} = \underline{44{,}12\,\mathrm{MPa}} \\
\tau_{xs,w\max}^t &= \frac{M_t}{W_t^w} = \frac{5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{MNm}}{2{,}2667 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^3} = \underline{22{,}06\,\mathrm{MPa}}
\end{aligned}
$$

Koska vääntömomentti on positiivinen, nämä positiiviset leikkausjännitykset esiintyvät laippojen ja uuman positiivisella reunalla. Koska kokonaisleikkausjännitys on $\tau_{xs} = \bar{\tau}_{xs} + \tau_{xs}^t$, sen suurin arvo on laipoissa ja uumassa saadaan siellä, missä keskimääräinen leikkausjännitys $\bar{\tau}_{xs}$ on suurin. Näin saadaan

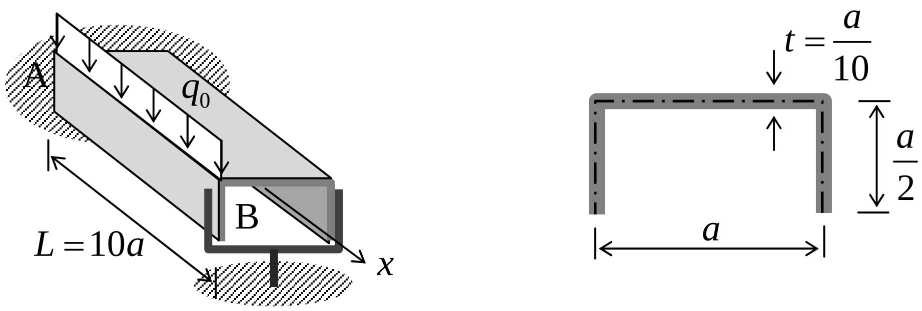
$$
\begin{aligned}
\tau_{sx,f\max} &= \bar{\tau}_{xs,f\max} + \tau_{xs,f\max}^t = 23{,}08\,\mathrm{MPa} + 44{,}12\,\mathrm{MPa} = \underline{67{,}20\,\mathrm{MPa}} \\
\tau_{sx,w\max} &= \bar{\tau}_{xs,w\max} + \tau_{xs,w\max}^t = 26{,}79\,\mathrm{MPa} + 22{,}06\,\mathrm{MPa} = \underline{48{,}85\,\mathrm{MPa}}
\end{aligned}
$$

Arvio suurimalle kokonaisleikkausjännitykselle on: $\underline{\underline{\tau_{sx,\max} \approx 67{,}2\,\mathrm{MPa}}}$.

Se on alalaipan keskiosassa sen alareunassa.

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2010

Kotitehtävä 4:



Kuvan palkki on päästään A jäykästi kiinnitetty, päästään B haarukkalaakeroitu ja sitä kuormittaa vasemman uuman keskiviivan kohdalla tasainen viivakuorma q_0. (a) Määritä palkin sektoriaalisen vääntömomentin $M_\omega(x)$ ja bimomentin $B(x)$ lausekkeet, niiden kuvaajat ja itseisarvoltaan suurimmat arvot. (b) Määritä itseisarvoltaan suurin väännöstä aiheutuva normaalijännitys ja itseisarvoltaan suurin väännöstä aiheutuva leikkausjännitys palkissa. Palkin pituus on $L = 10a$, kimmomoduuli on E, Poissonin vakio on $\nu = 0,3$ ja profiilin paksuus on $t = a/10$. Lausu tulokset suureiden a ja q_0 avulla.

Osittainen vastaus:

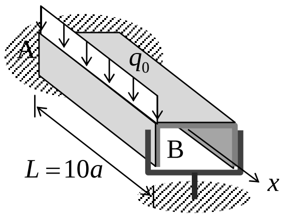
(a) $|M_\omega|_{\max} \approx 2,864 q_0 a^2$, $|B|_{\max} = 3,640 q_0 a^3$

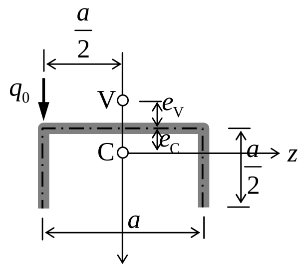
(b) $|\sigma_x|_{\max} = 624,0 \dfrac{q_0}{a}$, $|\bar{\tau}_{xs}|_{\max} = 76,7 \dfrac{q_0}{a}$

Palautus pe 8.10 klo 16.00 mennessä.

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2010

Kotitehtävän ratkaisu 4:





<u>Poikkileikkaussuureita:</u>

$$e_C = \frac{(\frac{a}{2})^2}{a + 2\frac{a}{2}} = \frac{a}{8},\ e_V = \frac{3 \cdot (a/2)^2}{a + 6 \cdot a/2} = \frac{3}{16}a$$

$$I_t = \frac{(a/10)^3}{3}(a + 2\frac{a}{2}) = \frac{1}{1500}a^4,\ I_\omega = \frac{a^2 (a/2)^3 \cdot a/10}{12}\frac{2a + 3 \cdot a/2}{a + 6 \cdot a/2} = \frac{7}{7680}a^6$$

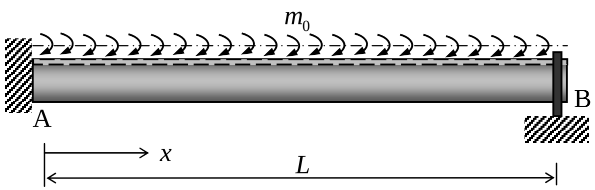
Kerroin k:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{2,6},\ k = L\sqrt{\frac{GI_t}{EI_\omega}} = 10a \cdot \sqrt{\frac{1/1500a^4}{2,6 \cdot 7a^6/7680}} = 5,3039$$

<u>Tasan jakautunut vääntävä momentti:</u>

$$m_0 = q_0\frac{a}{2} = \frac{q_0 a}{2}$$

<u>Differentiaaliyhtälön ratkaisu:</u>



Yksityisratkaisu:

$$\varphi_{t0}(x) = -\frac{1}{2}\frac{m_0}{GI_t}x^2$$

Suureet integrointivakioiden avulla:

- vääntökulma

$$\varphi_t(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \sinh(\frac{k}{L}x) + C_4 \cosh(\frac{k}{L}x) - \frac{1}{2}\frac{m_0}{GI_t}x^2$$

- vääntymä

$$\theta(x) \equiv \varphi_t'(x) = C_2 + C_3\frac{k}{L}\cosh(\frac{k}{L}x) + C_4\frac{k}{L}\sinh(\frac{k}{L}x) - \frac{m_0}{GI_t}x$$

- bimomentti

$$B(x) \equiv -EI_\omega\varphi_t''(x) = -EI_\omega[C_3(\frac{k}{L})^2\sinh(\frac{k}{L}x) + C_4(\frac{k}{L})^2\cosh(\frac{k}{L}x) - \frac{m_0}{GI_t}]$$

$$= -GI_t[C_3\sinh(\frac{k}{L}x) + C_4\cosh(\frac{k}{L}x)] + (\frac{L}{k})^2 m_0$$

- sektoriaalinen vääntömomentti

$$M_\omega(x) \equiv B'(x) = -GI_t[C_3\frac{k}{L}\cosh(\frac{k}{L}x) + C_4\frac{k}{L}\sinh(\frac{k}{L}x)]$$

Reunaehtojen huomiointi:

$$\varphi_t(0) \equiv C_1 + C_4 = 0$$

$$\theta(0) \equiv C_2 + C_3\frac{k}{L} = 0$$

$$\varphi_t(L) \equiv C_1 + C_2 L + C_3\sinh k + C_4\cosh k - \frac{1}{2}\frac{m_0 L^2}{GI_t} = 0$$

$$B(L) = -GI_t(C_3\sinh k + C_4\cosh k) + (\frac{L}{k})^2 m_0 = 0$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} C_1 + C_4 = 0 \ \Rightarrow\ C_1 = -C_4 \\ C_2 + C_3\frac{k}{L} = 0 \ \Rightarrow\ C_2 = -C_3\frac{k}{L} \\ C_1 + C_2 L + C_3\sinh k + C_4\cosh k = \frac{1}{2}\frac{m_0 L^2}{GI_t} \\ C_3\sinh k + C_4\cosh k = \frac{1}{k^2 GI_t}m_0 L^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\sinh k - k)C_3 + (\cosh k - 1)C_4 = \dfrac{1}{2}\dfrac{m_0 L^2}{GI_t} = 0 \\ \sinh k C_3 + \cosh k C_4 = \dfrac{1}{k^2 GI_t} m_0 L^2 \end{cases}$$

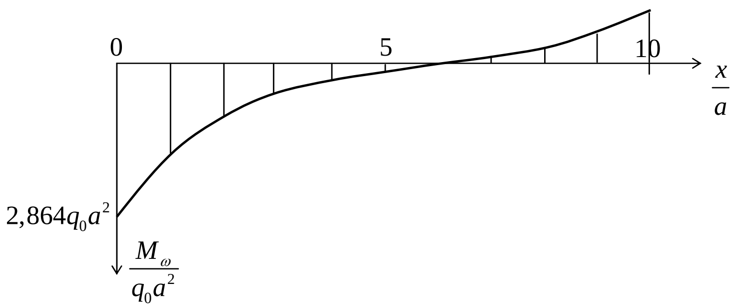
$$\Rightarrow \begin{cases} kC_3 + C_4 = \dfrac{m_0 L^2}{GI_t}\left(\dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{2}\right) \\ \sinh k C_3 + \cosh k C_4 = \dfrac{1}{k^2 GI_t} m_0 L^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_3 = -\dfrac{m_0 L^2}{GI_t}\dfrac{\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{2}\right)\cosh k - \frac{1}{k^2}}{\sinh k - k\cosh k} = -\dfrac{q_0 a (10a)^2}{2 \cdot GI_t} \cdot 0{,}107995 = -5{,}39976\dfrac{q_0 a^3}{GI_t} \\ C_4 = \dfrac{m_0 L^2}{GI_t}\dfrac{\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{2}\right)\sinh k - \frac{1}{k}}{\sinh k - k\cosh k} = \dfrac{q_0 a (10a)^2}{2 \cdot GI_t} \cdot 0{,}108343 = 5{,}41717\dfrac{q_0 a^3}{GI_t} \end{cases}$$

Sektoriaalinen vääntömomentti:

$$M_\omega(x) = -GI_t\left[C_3 \frac{k}{L}\cosh\left(\frac{k}{L}x\right) + C_4 \frac{k}{L}\sinh\left(\frac{k}{L}x\right)\right]$$

$$= q_0 a^2\left[2{,}86398\cosh\left(0{,}53039\frac{x}{a}\right) - 2{,}87322\sinh\left(0{,}53039\frac{x}{a}\right)\right]$$



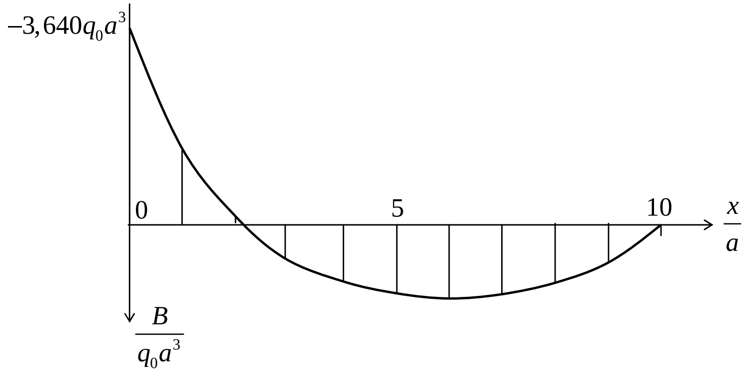
Sen suurin arvo on tuella A:

$$M_{\omega A} \equiv M_\omega(0) \approx \underline{2{,}864 q_0 a^2}$$

Bimomentti:

$$B(x) = -GI_t\left[C_3 \sinh\left(\frac{k}{L}x\right) + C_4 \cosh\left(\frac{k}{L}x\right)\right] + \left(\frac{L}{k}\right)^2 m_0$$

$$= q_0 a^3\left[5{,}39976\sinh\left(0{,}53039\frac{x}{a}\right) - 5{,}41717\cosh\left(0{,}53039\frac{x}{a}\right) + 1{,}77738\right]$$



Sen itseisarvoltaan suurin arvo on tuella A:

$$B_A \equiv B(0) = -3{,}640 q_0 a^3$$

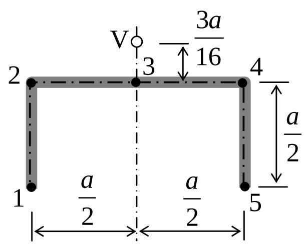
Suurin väännöstä aiheutuva normaalijännitys:

Väännöstä aiheutuva normaalijännitys

$$\sigma_x(x,s) = \frac{B(x)}{I_\omega}\omega(s)$$

saa itseisarvoltaan suurimman arvonsa palkin kohdassa, jossa bimomentti saa itseisarvoltaan suurin, ja profiilin kohdassa, jossa sektoriaalinen koordinaatti $\omega(s) = \omega_V(s)$ on itseisarvoltaan suurin.

Sektoriaalinen koodinaatti:



$\omega_3 = 0,$ (nollapiste)

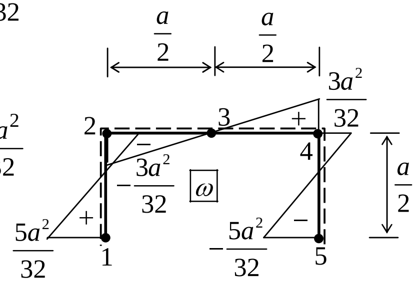
$$\omega_4 = \omega_3 + h_{V34}\Delta s_{34} = \frac{3a}{16}\cdot\frac{a}{2} = \frac{3a^2}{32}$$

$$\omega_5 = \omega_4 - h_{V45}\Delta s_{45} = \frac{3a^2}{32} - \frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2} = -\frac{5a^2}{32}$$

$$\omega_2 = \omega_3 - h_{V32}\Delta s_{32} = \frac{3a}{16}\cdot\frac{a}{2} = -\frac{3a^2}{32}$$

$$\omega_1 = \omega_2 - h_{V21}\Delta s_{21} = -\frac{3a^2}{32} + \frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2} = \frac{5a^2}{32}$$

$$\underline{|\omega|_{\max} = \frac{5}{32}a^2}$$



Palkin suurimman normaalijännityksen itseisarvo on:

$$|\sigma_x|_{\max} = \frac{|B_A|}{I_\omega}|\omega|_{\max} = \frac{3,640 q_0 a^3}{\frac{7}{7680}a^6}\frac{5}{32}a^2 = \underline{\underline{624,0\frac{q_0}{a}}}$$

<u>Suurin väännöstä aiheutuva keskimääräinen leikkausjännitys:</u>

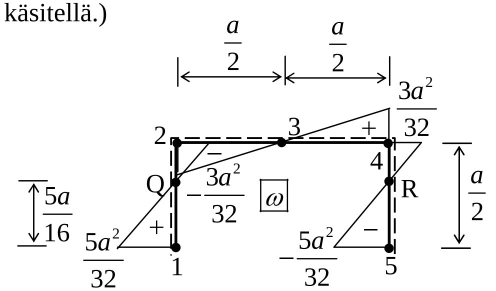
Väännöstä aiheutuva keskimääräinen leikkausjännitys

$$\bar{\tau}_{xs}(x,s) = \frac{M_\omega(x)S_\omega(s)}{I_\omega t}$$

saa itseisarvoltaan suurimman arvonsa palkin kohdassa, jossa sektoriaalinen vääntömomentti $M_\omega(x)$ on itseisarvoltaan suurin, ja profiilin kohdassa, jossa sektoriaalinen staattinen momentti $S_\omega(s)$ on itseisarvoltaan suurin. Sektoriaalinen staattinen momentti

$$S_\omega(s) = \int_0^s \omega(s) t ds$$

saa ääriarvon pisteessä, jossa $S'_\omega(s) \equiv \omega(s)t$ häviää eli $\omega(s)$ häviää. Näin käy pisteissä Q, 3 ja R. (Pistettä R ei symmertian vuoksi tarvitse käsitellä.)



Sektoriaaliselle staattiselle momentille pisteessä Q saadaan

$$S_{\omega Q} = -t\int_1^Q \omega(s)ds = -\frac{a}{10}\frac{1}{2}\omega_1\frac{5a}{16} = -\frac{a}{10}\frac{1}{2}\frac{5a^2}{32}\frac{5a}{16} = -\frac{5a^4}{2048}$$

Sektoriaaliselle staattiselle momentille pisteessä 3 saadaan

$$S_{\omega 3} = -t\int_1^3 \omega(s)ds = -t[\int_1^2 \omega(s)ds + \int_2^3 \omega(s)ds] = -\frac{a}{10}[\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\omega_2\frac{a}{2}]$$

$$= -\frac{a}{40}(\frac{5a^3}{32} - \frac{3a^3}{32} - \frac{3a^3}{32}) = \frac{a^4}{1280}$$

Edellinen on näistä itseisarvoltaan suurempi, joten

$$\underline{\left|S_{\omega}\right|_{\max} = \frac{5a^4}{2048}}$$

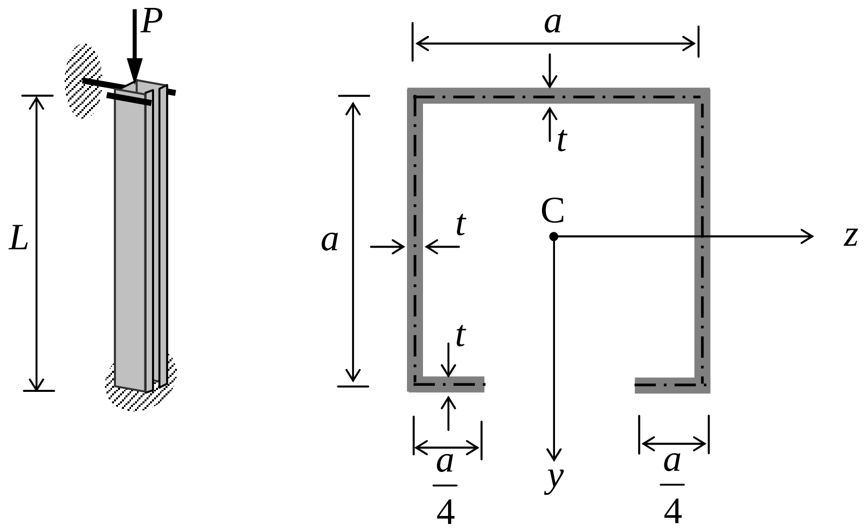
Palkin suuriman väännöstä aiheutuvan keskimääräisen leikkausjännityksen itseisarvo on:

$$\left|\bar{\tau}_{xs}\right|_{\max} = \frac{M_{\omega\mathrm{A}}\left|S_{\omega}\right|_{\max}}{I_{\omega}t} = \frac{2,864q_0a^2 \cdot \frac{5a^4}{2048}}{\frac{7}{7680}a^6 \cdot \frac{a}{10}} = \underline{\underline{76,7\frac{q_0}{a}}}$$

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2010

Kotitehtävä 5:

Oheinen sauva on yläpäästään haarukkalaakeroitu ja alapäästään jäykästi kiinnitetty. Kuinka suurella keskeisen puristavan kuorman *P* arvolla sauva nurjahtaa? Sauvan pituus on $L = 10a$, seinämien paksuus on $t = a/10$ ja kimmomoduuli on E ja Poissonin luku on $\nu = 0,25$.



Välituloksia:

$$e_C = \frac{3}{7}a,\ I_z = \frac{11}{210}a^4,\ e_V = \frac{5}{9}a,\ I_\omega = \frac{7}{432}a^6.$$

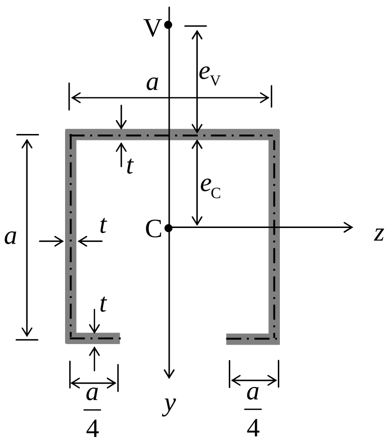
V*astaus:*

$$P_{kr} \approx 0,002445Ea^2$$

Palautus pe 15.10 klo 16.00 mennessä.

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2010

Kotitehtävä 5 ratkaisu:



Kaavakokoelman taulukoita käyttäen saadaan poikkileikkaussuureita:

$$A = 3\cdot ta + 2\cdot t\frac{a}{4} = \frac{7}{20}a^2 \approx 0{,}35a^2$$

$$e_C = \frac{a^2 + 2a\cdot a/4}{a + 2a + 2\cdot a/4} = \frac{3}{7}a \approx 0{,}42857a$$

$$I_y = \frac{ta^3}{12} + \frac{t(a/4)^3}{6} + 2t\frac{a}{4}\left(\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\frac{a}{4}\right)^2 + 2ta\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{21}{320}a^4 \approx 0{,}065625a^4$$

$$I_z = \frac{ta^3}{6} + 2ta\left(\frac{a}{2} - e_C\right)^2 + tae_C^{\,2} + 2t\frac{a}{4}(a - e_C)^2 = \frac{11}{210}a^4 \approx 0{,}052381a^4$$

$$I_{yz} = 0$$

$$e_V = a\frac{3a^2a + 6a^2(a/4) - 8(a/4)^3}{a^3 + 6a^2a + 6a^2(a/4) + 8(a/4)^3 - 12a(a/4)^2} = \frac{5}{9}a \approx 0{,}55556a$$

$$I_t = \frac{t^3}{3}\left(a + 2a + 2\cdot\frac{a}{4}\right) = \frac{7a^4}{6000} \approx 0{,}0011667a^4$$

$$I_\omega = t\left\{\frac{a^2a^2}{2}\left[\frac{a}{4} + \frac{a}{3} - e_V - \frac{2e_V(a/4)}{a} + \frac{2(a/4)^2}{a}\right]\right.$$
$$\left. + \frac{a^2e_V^2}{2}\left[a + \frac{a}{4} + \frac{a}{6} - \frac{2(a/4)^2}{a}\right] + \frac{2(a/4)^3}{3}(a + e_V)^2\right\} = \frac{7}{432}a^6 \approx 0{,}016204a^6$$

$$y_V = -(e_C + e_V) = -\left(\frac{3}{7}a + \frac{5}{9}a\right) = -\frac{62}{63}a \approx -0{,}98413a$$

Poikkileikkaussuure r^2:

$$r^2 = \frac{I_y + I_z}{A} + y_V^2 + z_V^2 = \frac{\frac{21}{320}a^4 + \frac{11}{210}a^4}{\frac{7}{20}a^2} + \left(-\frac{62}{63}a\right)^2 \approx 1{,}30567a^2$$

Nurjahduspituus: $L_n = 0{,}70L = 7{,}0a$

Puhtaiden taivutus- ja vääntönurjahdustapausten kriittiset kuormat:

$$P_v = \frac{\pi^2 EI_z}{L_n^2} = \frac{\pi^2 E\cdot\frac{11}{210}a^4}{(7{,}0a)^2} \approx 0{,}010551Ea^2$$

$$P_w = \frac{\pi^2 EI_y}{L_n^2} = \frac{\pi^2 E\cdot\frac{21}{320}a^4}{(7{,}0a)^2} \approx 0{,}013218Ea^2$$

$$P_\varphi = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\pi^2 EI_\omega}{L_n^2} + GI_t\right) = \frac{1}{1{,}30567a^2}\left[\frac{\pi^2 E\cdot\frac{7}{432}a^6}{(7{,}0a)^2} + \frac{E}{2(1+0{,}25)}\cdot\frac{7a^4}{6000}\right]$$
$$= 2{,}8571\cdot10^{-3}Ea^2$$

Ehto kriittiselle kuormalle:

$$\begin{vmatrix} P_v - P & 0 & -\overbrace{z_V}^{0}P \\ 0 & P_w - P & y_VP \\ -\overbrace{z_V}^{0}P & y_VP & r^2P_\varphi - r^2P \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} P_v - P & 0 & 0 \\ 0 & P_w - P & y_VP \\ 0 & y_VP & r^2(P_\varphi - P) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow\ (P_v - P)[(P_w - P)r^2(P_\varphi - P) - y_V^2P^2] = 0$$

$$\Rightarrow\ P = P_v,\ P^2 - \frac{P_w + P_\varphi}{1 - y_V^2/r^2}P + \frac{P_wP_\varphi}{1 - y_V^2/r^2} = 0$$

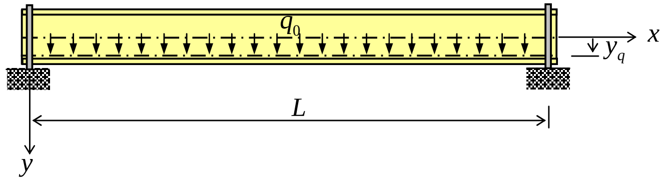
$$\Rightarrow\ P_1 \approx 0{,}01055Ea^2,\ P^2 - 0{,}062251P + 1{,}46246\cdot10^{-4} = 0$$

$$\Rightarrow P_1 = P_v \approx 0{,}01055Ea^2,\ P_2 \approx 0{,}05981Ea^2,\ P_3 \approx \underline{0{,}002445Ea^2}$$

Kriittinen kuorma: $P_{kr} = \underline{\underline{0{,}002445Ea^2}}$

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2010

Kotitehtävä 6:



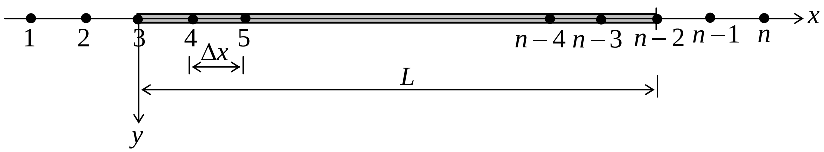
Tarkastellaan oheista tasaisen kuorman q_0, kuormittamaa päistään haarukkalaakeroitua palkkia, jossa kuorman vaikutussuoran $y-$koordinaatti on y_q. Palkin poikkileikkaus on kaksoissymmetrinen. (a) Saata palkin kiepahdustehtävän differentiaaliyhtälö muotoon

$$\varphi_t^{(4)} - \frac{a}{L^2}\varphi_t'' + \frac{1}{L^4}[\lambda b - \lambda^2 f(x)]\varphi_t = 0\,, \tag{1}$$

missä

$$\lambda = \frac{q_0 L^4}{\sqrt{EI_y EI_\omega}} \tag{2}$$

on dimensioton tasaisen kuorman q_0 sisältävä ominaisarvo. Mitkä ovat dimensiottomien vakioiden a ja b sekä funktion $f(x)$ lausekkeet?



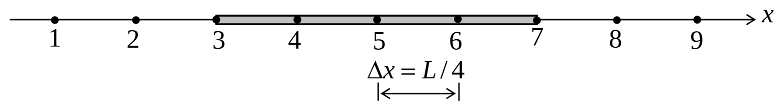
(b) Muodosta kenttäyhtälöä (1) vastaava differenssiyhtälö ja saata se muotoon

$$\begin{aligned}&\varphi_{ti-2} - (4 + a\frac{\Delta x^2}{L^2})\varphi_{ti-1} + (6 + 2a\frac{\Delta x^2}{L^2})\varphi_{ti} - (4 + a\frac{\Delta x^2}{L^2})\varphi_{ti+1} + \varphi_{ti+2}\\ &\quad + \lambda \cdot b\frac{\Delta x^4}{L^4}\varphi_{ti} - \lambda^2 f_i \frac{\Delta x^4}{L^4}\varphi_{ti} = 0\end{aligned} \tag{3}$$

missä $f_i = f(x_i)$.

(c) Muodosta kenttäyhtälöä ja reunaehtoja vastaavat differenssiyhtälöt reunan differenssipisteissä 3 ja $n-2$ sekä lausu niitä käyttäen reunan ja ulkoisten differenssipisteiden differenssiarvot sisäisten pisteiden differenssiarvojen avulla seuraavasti

$$\begin{aligned}&\varphi_{t1} = -\varphi_{t5},\ \varphi_{t2} = -\varphi_{t4}\ \ \varphi_{t3} = 0,\\ &\varphi_{tn} = -\varphi_{tn-4},\ \varphi_{tn-1} = -\varphi_{tn-3},\ \varphi_{tn-2} = 0.\end{aligned} \tag{4}$$



(d) Käytetään oheista differenssiverkkoa tarkasteltavan kiepahdus-tehtävän ratkaisemiseksi. Muodosta sisäpisteiden 4, 5 ja 6 differenssiyhtälöt (3) ja eliminoi niistä kaavoja (4) käyttäen reunojen ja ulkoisten differenssipisteiden differenssiarvot. Esitä saatu kolmen tuntemattoman differenssiyhtälö muodossa

$$([A] + \lambda[B] - \lambda^2[C])\{\varphi\} = 0\,, \tag{5}$$

missä

$$\{\varphi\} = \begin{Bmatrix}\varphi_{t4}\\ \varphi_{t5}\\ \varphi_{t6}\end{Bmatrix} \tag{6}$$

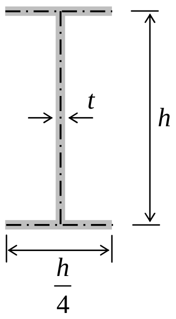
Mitkä ovat matriisit $[A]$, $[B]$ ja $[C]$?

Yhtälöt (5) muodostavat ominaisarvotehtävän, ominaisarvojen λ_i, $i = 1,2,3$ määrittämiseksi. Kriittistä kuormaa vastaava ominaisarvo λ_{kr} on näitä pienin. Ominaisarvotehtävä (5) ei ole tavanomainen, lineaarinen. Se on helpointa ratkaista likimääräisesti seuraavasti: Otetaan käyttöön funktio

$$f(\lambda) \equiv \det([A] + \lambda[B] - \lambda^2[C])\,. \tag{7}$$

Piirretään sitten funktion $f(\lambda)$ kuvaaja riittävän tiheällä jaolla parametrin λ arvoja alkaen nollasta. Kohta, jossa kuvaaja leikkaa ensimmäisen kerran λ akselin antaa likiarvon ominaisarvolle λ_{kr}.

(e) Tarkastellaan palkkia, jolla on oheinen poikkileikkaus seinämän paksuuden ollessa $t = h/10$. Palkin pituus on $L = 10h$ ja materiaalin kimmomoduuli on E ja Poissonin luku on $\nu = 0,25$. Määritä palkin kriittinen kuorma $q_{0,\mathrm{kr}}$, kun kuorma vaikuttaa (i) alalaipan keskiviivan ja (ii) ylälaipan keskiviivan korkeuksilla.



Osittainen vastaus:

(a)

$$a = \frac{GI_t L^2}{EI_\omega},\ b = \sqrt{\frac{EI_y L^2}{EI_\omega}}\frac{y_q}{L},\ f(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right)^2$$

(d)

$$[A] = \begin{bmatrix} 5+\frac{a}{8} & -4-\frac{a}{16} & 1 \\ -4-\frac{a}{16} & 6+\frac{a}{8} & -4-\frac{a}{16} \\ 1 & -4-\frac{a}{16} & 5+\frac{a}{8} \end{bmatrix},$$

$$[B] = \frac{b}{256}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ [C] = \frac{1}{256}\begin{bmatrix} f_4 & 0 & 0 \\ 0 & f_5 & 0 \\ 0 & 0 & f_6 \end{bmatrix}$$

(e)

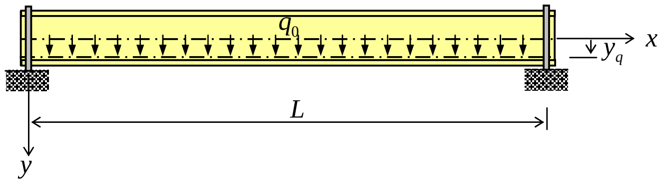
(i) $q_{0,\mathrm{kr}} \approx 6,91 \cdot 10^{-6} Eh$ (kuorma alalaipan korkeudella)

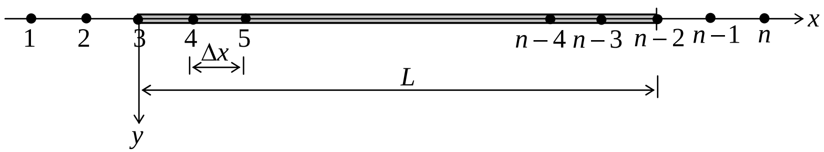
(ii) $q_{0,\mathrm{kr}} \approx 5,87 \cdot 10^{-6} Eh$ (kuorma ylälaipan korkeudella)

Palautus pe 22.10 klo 16.00 mennessä.

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2010

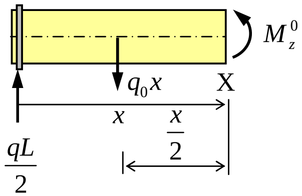
Kotilaskun 6 ratkaisu:





(a) <u>Kenttäyhtälö:</u>

Taivutusmomentti M_z^0:



$$\circlearrowright X) \quad M_z^0 + q_0 x \cdot \frac{x}{2} - \frac{qL}{2} x \;\Rightarrow\; M_z^0 = \frac{q_0 L^2}{2}\left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right)$$

Koske poikkileikkaus on kaksoissymmetrinen $\beta_y = 0$ ja $y_V = 0$ yhtälöstä (5.8) saadaan

$$EI_\omega \varphi_t^{(4)} - (GI_t + 2\overbrace{\beta_y}^{0} M_z^0)\varphi_t'' - 2\overbrace{\beta_y}^{0} Q_y^0 \varphi_t' - \left[\frac{(M_z^0)^2}{EI_y} - \overbrace{q_y^0}^{q_0}(y_q - \overbrace{y_V}^{0})\right]\varphi_t = 0$$

$$\Rightarrow\; \varphi_t^{(4)} - \frac{GI_t}{EI_\omega}\varphi_t'' - \left[\frac{(M_z^0)^2}{EI_y EI_\omega} - \frac{q_0 y_q}{EI_\omega}\right]\varphi_t = 0$$

$$\Rightarrow\; \varphi_t^{(4)} - \frac{GI_t}{EI_\omega}\varphi_t'' + \left[\frac{q_0 y_q}{EI_\omega} - \frac{q_0^2 L^4}{4 EI_y EI_\omega}\left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right)^2\right]\varphi_t = 0$$

ja

$$\varphi_t^{(4)} - \frac{a}{L^2}\varphi_t'' + \frac{1}{L^4}[\lambda b - \lambda^2 f(x)]\varphi_t = 0 \tag{1}$$

missä

$$\lambda = \frac{q_0 L^4}{\sqrt{EI_y EI_\omega}} \tag{2}$$

on kuorman q_0 sisältävä dimensioton ominaisarvo,

$$a = \frac{GI_t L^2}{EI_\omega}, \; b = \sqrt{\frac{EI_y L^2}{EI_\omega}} \frac{y_q}{L} \tag{3}$$

ovat tunnettuja dimensiottomia vakioita ja

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right)^2 \tag{4}$$

on tunnettu dimensioton funktio.

(b) <u>Kenttäyhtälöä vastaava differenssiyhtälö:</u>

Differenssipisteessä i saadaan

$$\varphi_{ti}^{(4)} - \frac{a}{L^2}\varphi_{ti}'' + \lambda \frac{b}{L^4}\varphi_{ti} - \lambda^2 \frac{f_i}{L^4}\varphi_{ti} = 0, \tag{5}$$

missä

$$f_i = f(x_i) = \frac{1}{4}\left(\frac{x_i}{L} - \frac{x_i^2}{L^2}\right)^2 \tag{6}$$

on funktion $f(x)$ differenssiarvo. Sijoittamalla derivaattojen differenssi-lausekkeet saadaan tästä

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Delta x^4}(\varphi_{ti-2} - 4\varphi_{ti-1} + 6\varphi_{ti} - 4\varphi_{ti+1} + \varphi_{ti+2}) - \frac{a}{L^2}\frac{1}{\Delta x^2}(\varphi_{ti-1} - 2\varphi_{ti} + \varphi_{ti+1}) \\ &\quad + \lambda \frac{b}{L^4}\varphi_{ti} - \lambda^2 \frac{f_i}{L^4}\varphi_{ti} = 0\end{aligned} \tag{7}$$

ja edelleen kenttäyhtälöä (1) vastaavaksi differenssiyhtälöksi

$$\begin{aligned}&\varphi_{ti-2}-(4+a\frac{\Delta x^2}{L^2})\varphi_{ti-1}+(6+2a\frac{\Delta x^2}{L^2})\varphi_{ti}-(4+a\frac{\Delta x^2}{L^2})\varphi_{ti+1}+\varphi_{ti+2}\\&\quad+\lambda\cdot b\frac{\Delta x^4}{L^4}\varphi_{ti}-\lambda^2 f_i\frac{\Delta x^4}{L^4}\varphi_{ti}=0\end{aligned}\tag{8}$$

(c) <u>Kenttäyhtälöä ja reunaehtoja vastaavat differenssiyhtälöt reunan differenssipisteissä 3 ja $n-2$:</u>

Reunaehdot ovat

$$\varphi_t(0)=0,\ \varphi_t''(0)=0,\ \varphi_t(L)=0,\ \varphi_t''(L)=0\,.\tag{9}$$

Reunan differenssipisteissä 3 ja $n-2$ saadaan

$$\varphi_{t3}=0,\ \frac{\varphi_{t2}-2\varphi_{t3}+\varphi_{t4}}{\Delta x^2}=0,\ \varphi_{tn-2}=0,\ \frac{\varphi_{tn-3}-2\varphi_{tn-2}+\varphi_{tn-1}}{\Delta x^2}=0\tag{10}$$

ja edelleen reunaehtoja vastaaviksi differenssiyhtälöiksi

$$\underline{\varphi_{t3}=0,\ \varphi_{t2}=-\varphi_{t4},\ \varphi_{tn-2}=0,\ \varphi_{tn-1}=-\varphi_{tn-3}}\,.\tag{11}$$

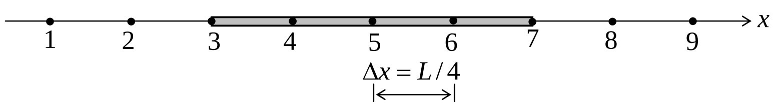
Yhtälölle (8) differenssipisteessä 3 saadaan

$$\begin{aligned}&\varphi_{t1}-(4+a\frac{\Delta x^2}{L^2})\overbrace{\varphi_{t2}}^{-\varphi_{t4}}+(6+2a\frac{\Delta x^2}{L^2})\overbrace{\varphi_{t3}}^{0}-(4+a\frac{\Delta x^2}{L^2})\varphi_{t4}+\varphi_{t5}\\&\quad+\lambda\cdot b\frac{\Delta x^4}{L^4}\overbrace{\varphi_{t3}}^{0}-\lambda^2 f_3\frac{\Delta x^4}{L^4}\overbrace{\varphi_{t3}}^{0}=0\\&\Rightarrow\ \underline{\varphi_{t1}=-\varphi_{t5}}\end{aligned}\tag{12}$$

Yhtälölle (8) differenssipisteessä $n-2$ saadaan

$$\begin{aligned}&\varphi_{tn-4}-(4+a\frac{\Delta x^2}{L^2})\varphi_{tn-3}+(6+2a\frac{\Delta x^2}{L^2})\overbrace{\varphi_{tn-2}}^{0}-(4+a\frac{\Delta x^2}{L^2})\overbrace{\varphi_{tn-1}}^{-\varphi_{tn-3}}+\varphi_{tn}\\&\quad+\lambda\cdot b\frac{\Delta x^4}{L^4}\overbrace{\varphi_{tn-2}}^{0}-\lambda^2 f_{n-2}\frac{\Delta x^4}{L^4}\overbrace{\varphi_{tn-2}}^{0}=0\\&\Rightarrow\ \underline{\varphi_{tn}=-\varphi_{tn-4}}\end{aligned}\tag{13}$$

(c) <u>Kenttäyhtälöitä vastaavat differenssiyhtälöt sisäpisteissä 4, 5 ja 6:</u>



Pisteissä 4, 5 ja 6 saadaan

$$\begin{aligned}&\overbrace{\varphi_{t2}}^{-\varphi_{t4}}-(4+a\overbrace{\frac{\Delta x^2}{L^2}}^{1/4^2})\overbrace{\varphi_{t3}}^{0}+(6+2a\overbrace{\frac{\Delta x^2}{L^2}}^{1/4^2})\varphi_{t4}-(4+a\overbrace{\frac{\Delta x^2}{L^2}}^{1/4^2})\varphi_{ti5}+\varphi_{t6}\\&\quad+\lambda\cdot b\overbrace{\frac{\Delta x^4}{L^4}}^{1/4^4}\varphi_{t4}-\lambda^2 f_4\overbrace{\frac{\Delta x^4}{L^4}}^{1/4^4}\varphi_{t4}=0\\&\overbrace{\varphi_{t3}}^{0}-(4+a\overbrace{\frac{\Delta x^2}{L^2}}^{1/4^2})\varphi_{t4}+(6+2a\overbrace{\frac{\Delta x^2}{L^2}}^{1/4^2})\varphi_{t5}-(4+a\overbrace{\frac{\Delta x^2}{L^2}}^{1/4^2})\varphi_{t6}+\overbrace{\varphi_{ti7}}^{0}\\&\quad+\lambda\cdot b\overbrace{\frac{\Delta x^4}{L^4}}^{1/4^4}\varphi_{t5}-\lambda^2 f_5\overbrace{\frac{\Delta x^4}{L^4}}^{1/4^4}\varphi_{t5}=0\\&\varphi_{t4}-(4+a\overbrace{\frac{\Delta x^2}{L^2}}^{1/4^2})\varphi_{t5}+(6+2a\overbrace{\frac{\Delta x^2}{L^2}}^{1/4^2})\varphi_{t6}-(4+a\overbrace{\frac{\Delta x^2}{L^2}}^{1/4^2})\overbrace{\varphi_{t7}}^{0}+\overbrace{\varphi_{t8}}^{-\varphi_{t6}}\\&\quad+\lambda\cdot b\overbrace{\frac{\Delta x^4}{L^4}}^{1/4^4}\varphi_{t6}-\lambda^2 f_i\overbrace{\frac{\Delta x^4}{L^4}}^{1/4^4}\varphi_{t6}=0\end{aligned}$$

ja edelleen

$$\begin{cases} (5+\frac{a}{8})\varphi_{t4} - (4+\frac{a}{16})\varphi_{t5} + \varphi_{t6} + \lambda \cdot \frac{b}{256}\varphi_{t4} - \lambda^2 \frac{f_4}{256}\varphi_{t4} = 0 \\ -(4+\frac{a}{16})\varphi_{t4} + (6+\frac{a}{8})\varphi_{t5} - (4+\frac{a}{16})\varphi_{t6} + \lambda \cdot \frac{b}{256}\varphi_{t5} - \lambda^2 \frac{f_5}{256}\varphi_{t5} = 0 \\ \varphi_{t4} - (4+\frac{a}{16})\varphi_{t5} + (5+\frac{a}{8})\varphi_{t6} + \lambda \cdot \frac{b}{256}\varphi_{t6} - \lambda^2 \frac{f_i}{256}\varphi_{t6} = 0 \end{cases}$$

Tämä yhtälöryhmä on matriisimuodossa

$$([A] + \lambda[B] - \lambda^2[C])\{\varphi\} = 0$$

missä

$$[A] = \begin{bmatrix} 5+\frac{a}{8} & -4-\frac{a}{16} & 1 \\ -4-\frac{a}{16} & 6+\frac{a}{8} & -4-\frac{a}{16} \\ 1 & -4-\frac{a}{16} & 5+\frac{a}{8} \end{bmatrix},$$

$$[B] = \frac{b}{256}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ja

$$[C] = \frac{1}{256}\begin{bmatrix} f_4 & 0 & 0 \\ 0 & f_5 & 0 \\ 0 & 0 & f_6 \end{bmatrix}$$

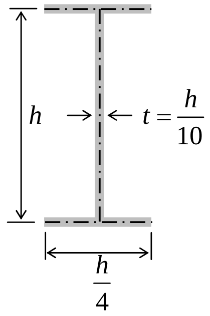
Laskemalla funktion f differenssiarvot

$$f_4 = \frac{1}{4}(\frac{x_4}{L} - \frac{x_4^2}{L^2})^2 = \frac{1}{4}(\frac{1}{4} - \frac{1}{4^2})^2 = \frac{9}{1024}$$
$$f_5 = \frac{1}{4}(\frac{x_5}{L} - \frac{x_5^2}{L^2})^2 = \frac{1}{4}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2})^2 = \frac{1}{64}$$
$$f_6 = \frac{1}{4}(\frac{x_6}{L} - \frac{x_6^2}{L^2})^2 = \frac{1}{4}(\frac{3}{4} - \frac{3^2}{4^2})^2 = \frac{9}{1024}$$

saadaan matriisi $[C]$ muotoon

$$[C] = \frac{1}{262144}\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

(d) Kriittisen kuorman määrittäminen:



Poikkileikkaussuureet:

$$I_y = \frac{tb^3}{6} = \frac{h}{10}\frac{(h/4)^3}{6} = \frac{h^4}{3840}$$
$$I_z = \frac{t_w h^3}{12} + \frac{tbh^2}{2} = \frac{h}{10}(\frac{h^3}{12} + \frac{h/4 \cdot h^2}{2}) = \frac{h^4}{48}$$
$$I_t = \frac{1}{3}(2t^3 b + t_w^3 h) = \frac{1}{3}(\frac{h}{10})^3(2\frac{h}{4} + h) = \frac{h^4}{2000}$$
$$I_\omega = \frac{th^2 b^3}{24} = \frac{h}{10}\frac{h^2(h/4)^3}{24} = \frac{h^6}{15360}$$

Parametrit a ja b:

$$a = \frac{GI_t L^2}{EI_\omega} = \frac{E}{2(1+0,25)}\frac{\frac{h^4}{2000}(10h)^2}{E\frac{h^6}{15360}} = \frac{1536}{5}$$

$$b = \sqrt{\frac{EI_y L^2}{EI_\omega}}\frac{y_q}{L} = \sqrt{\frac{E\frac{h^4}{3840}(10h)^2}{E\frac{h^6}{15360}}}\frac{y_q}{10h} = 2\frac{y_q}{h}$$

Kerroinmatriisit:

$$[A]=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}217 & -116 & 5\\ -116 & 222 & -116\\ 5 & -116 & 217\end{bmatrix},$$

$$[B]=\frac{1}{128}\frac{y_q}{h}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$[C]=\frac{1}{262144}\begin{bmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 16 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{bmatrix}.$$

Ratkaisu:

$$f(\lambda)=\det([A]+\lambda[B]-\lambda^2[C])$$

Etsitään kohtia, joissa λ vaihtaa merkkiä:

λ	$f(\lambda),\ (y_q=h/2)$	$f(\lambda),\ (y_q=-h/2)$
0	37943	37943
100	37660	34107
200	33274	26686
300	25374	16710
400	14941	5604
500	3504	-4964
600	-7278	-13296

Etsitään merkin vaihtumiskotaa tarkemmin:

λ	$f(\lambda),\ (y_q=h/2)$	λ	$f(\lambda),\ (y_q=-h/2)$
500	3503,8	400	5604,5
520	1239,1	420	3392,4
540	-985,4	440	1215,7
560	-3155,8	460	-911,8

Etsitään merkin vaihtumiskohtaa vielä tarkemmin:

λ	$f(\lambda),\ (y_q=h/2)$	λ	$f(\lambda),\ (y_q=-h/2)$
520	1239,1	440	1215,7
524	790,6	444	785,8
528	343,7	448	358,0
532	-101,3	452	-67,6

Interpoloidaan kriittiset λ:n arvot:

$$y_q=\frac{h}{2}:\ \lambda_{\mathrm{kr}}=528+\frac{343{,}7}{790{,}6+101{,}3}4=531{,}1$$

$$y_q=-\frac{h}{2}:\ \lambda_{\mathrm{kr}}=448+\frac{358{,}0}{358{,}0+67{,}6}4=451{,}4$$

Lasketaan kriittiset kuormat:

$$\underline{y_q=\frac{h}{2}:}\ \ \frac{q_{0,\mathrm{kr}}L^4}{\sqrt{EI_yEI_\omega}}=\lambda_{\mathrm{kr}}\equiv 531{,}1$$

$$\Rightarrow\ q_{0,\mathrm{kr}}=531{,}1\frac{E\sqrt{I_yI_\omega}}{L^4}=531{,}1\frac{E\sqrt{\frac{h^4}{3840}\frac{h^6}{15360}}}{(10h)^4}\approx \underline{\underline{6{,}906\cdot 10^{-6}Eh}}$$

$$\underline{y_q=-\frac{h}{2}:}\ \ \frac{q_{0,\mathrm{kr}}L^4}{\sqrt{EI_yEI_\omega}}=\lambda_{\mathrm{kr}}\equiv 451{,}4$$

$$\Rightarrow\ q_{0,\mathrm{kr}}=451{,}4\frac{E\sqrt{I_yI_\omega}}{L^4}=451{,}4\frac{E\sqrt{\frac{h^4}{3840}\frac{h^6}{15360}}}{(10h)^4}\approx \underline{\underline{5{,}870\cdot 10^{-6}Eh}}$$