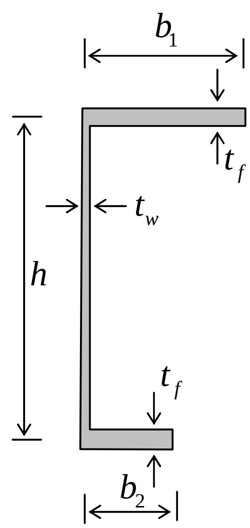
Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2009

Kotitehtävä 1:

Tarkastellaan kuvan poikkileikkausta.



$b_1 = 22,5\text{cm}$
$\text{b}_2 = 12,5\text{cm}$
$h = 45\text{cm}$
$t_f = 2,5\text{cm}$
$\text{t}_w = 1,25\text{cm}$

(a) Määritä poikkileikkauksen pintakeskiön C etäisyydet e_y ja e_z uuman ja ylälaipan keskiviivojen leikkauspisteestä.

(b) Valitse $y,z-$koordinaatistoksi pintakeskiökoordinaatisto ja piirrä poikkileikkauksen $y-$ ja $z-$kuviot.

(c) Määritä poikkileikkauksen sektoriaalinen koordinaatti ω'_{A}, jonka nollapiste O' on uuman ja ylälaipan leikkauspisteessä ja napa A on uuman ja alalaipan leikkauspisteessä, sekä piirrä $\omega'_{\text{A}}-$kuvio.

(d) Määritä poikkileikkauksen jäyhyysmomentit I_y ja I_z tulomomentti I_{yz} sekä sektoriaaliset tulomomentit $I_{y\omega'_{\text{A}}}$ ja $I_{z\omega'_{\text{A}}}$.

(e) Määritä poikkileikkauksen vääntökeskiön koordinaatit y_{V} ja z_{V}.

Ohje: Laskelmissa kannattaa käyttää numeroarvoja eikä symboleja b_1, b_2, h, t_1, jne. Jälkimmäisiä käyttäen laskelma tulee työläämmäksi.

Osittainen vastaus:

$e_y = 18,59\text{cm}$, $e_z = 5,76\text{cm}$,

$I_y = 6349,1\text{cm}^4$, $I_z = 51588,0\text{cm}^4$, $I_{yz} = -6603,3\text{cm}^4$,

$I_{y\omega'_{\text{A}}} = 529293,9\text{cm}^5$, $I_{y\omega'_{\text{B}}} = -263095,0\text{cm}^5$

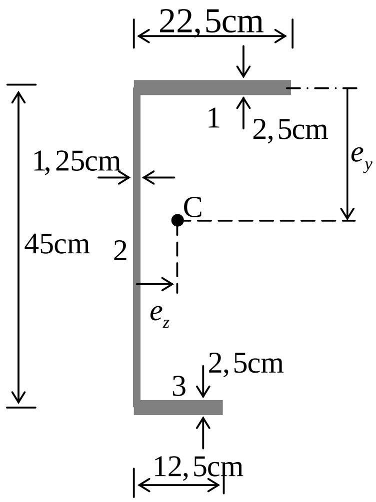
$y_{\text{V}} = -9,079\text{cm}$, $z_{\text{V}} = -11,478\text{cm}$

Palautus pe 18.9 klo 16.00 mennessä.

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2009

Kotitehtävän 1 ratkaisu:

(a)

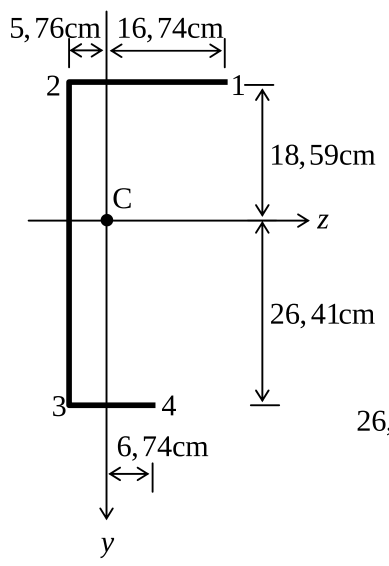


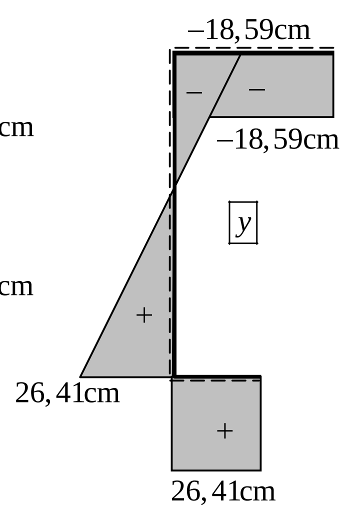
$$A = 22,5 \cdot 2,5 + 45 \cdot 1,25 + 12,5 \cdot 2,5 = 143,75\text{cm}^2$$

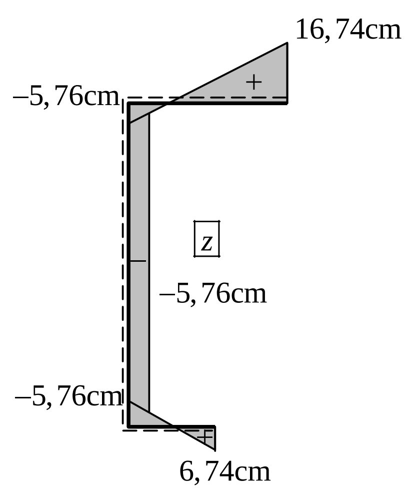
$$e_y = \frac{A_1 e_{y1} + A_2 e_{y2} + A_3 e_{y3}}{A} = \frac{22,5 \cdot 2,5 \cdot 0 + 45 \cdot 1,25 \cdot 22,5 + 12,5 \cdot 2,5 \cdot 45}{143,75} = 18,59\text{cm}$$

$$e_z = \frac{A_1 e_{z1} + A_2 e_{z2} + A_3 e_{z3}}{A} = \frac{22,5 \cdot 2,5 \cdot 11,25 + 45 \cdot 1,25 \cdot 0 + 12,5 \cdot 2,5 \cdot 6,25}{143,75} = 5,76\text{cm}$$

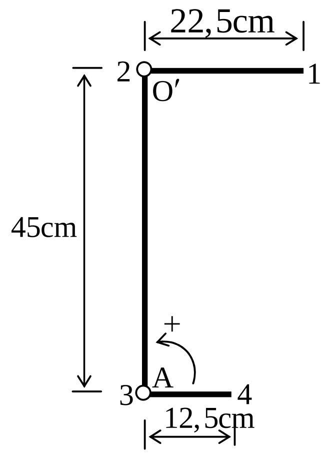
(b) Mittoja: $y-$kuvio: $z-$kuvio:





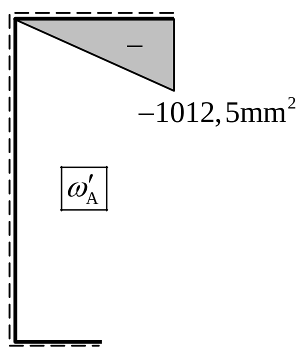


(c) Laskelma:

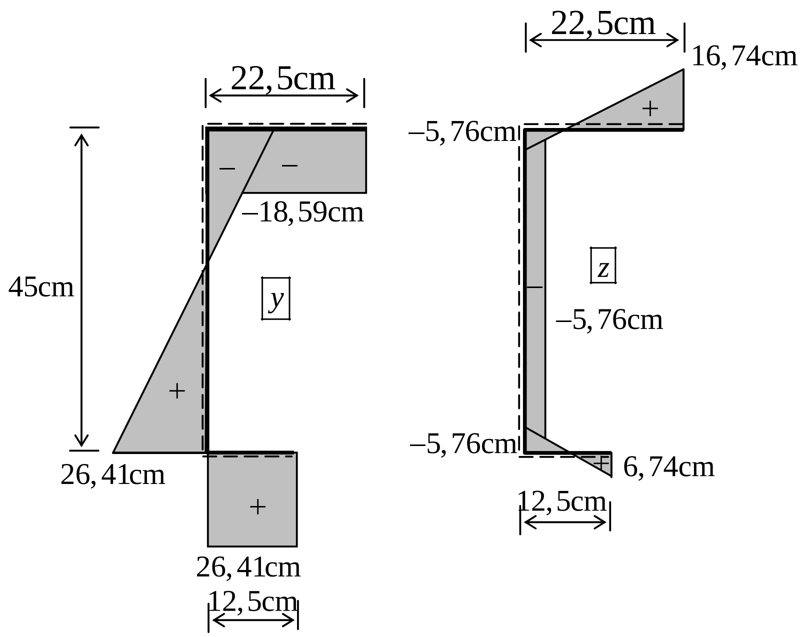


$$\omega'_{A2} = 0$$
$$\omega'_{A1} = \omega'_{A2} - h_{12}\Delta s_{12} = -45\text{cm} \cdot 22,5\text{cm} = -1012,5\text{cm}^2$$
$$\omega'_{A3} = \omega'_{A2} - h_{23}\Delta s_{23} = 0$$
$$\omega'_{A4} = \omega'_{A3} - h_{34}\Delta s_{34} = 0$$

ω'_{A} – kuvio:



(d) Lasketaan jäyhyysmomentit ja tulomomentti:



$$I_y = \int z^2 t ds = t_f \int_{f_1} z^2 ds + t_f \int_{f_2} z^2 ds + t_w \int_w z^2 ds$$

$$= 2,5\text{cm} \cdot \frac{22,5\text{cm}}{3}[(-5,76\text{cm})^2 - 5,76\text{cm} \cdot 16,74\text{cm} + (16,741\text{m})^2]$$

$$+ 2,5\text{cm} \cdot \frac{12,5\text{cm}}{3}[(-5,76\text{cm})^2 - 5,76\text{cm} \cdot 6,741\text{m} + (6,74\text{cm})^2]$$

$$+ 1,25\text{cm} \cdot 45\text{cm} \cdot (-5,76\text{cm})^2$$

$$= \underline{\underline{6349,1\text{mm}^4}}$$

$$I_z = \int y^2 t ds = t_f \int_{f_1} y^2 ds + t_f \int_{f_2} y^2 ds + t_w \int_w y^2 ds$$

$$= 2,5\text{cm} \cdot 22,5\text{cm} \cdot (-18,59\text{cm})^2 + 2,5\text{cm} \cdot 12,5\text{cm} \cdot (26,41\text{cm})^2$$

$$+ 1,25\text{cm} \cdot \frac{45\text{cm}}{3}[(-18,59\text{cm})^2 - 18,59\text{cm} \cdot 26,41\text{cm} + (26,41\text{cm})^2]$$

$$= \underline{\underline{51588,0\text{mm}^4}}$$

$$I_{yz} = \int yzt ds = t_f \int_{f_1} yz ds + t_f \int_{f_2} yz ds + t_w \int_w yz ds$$

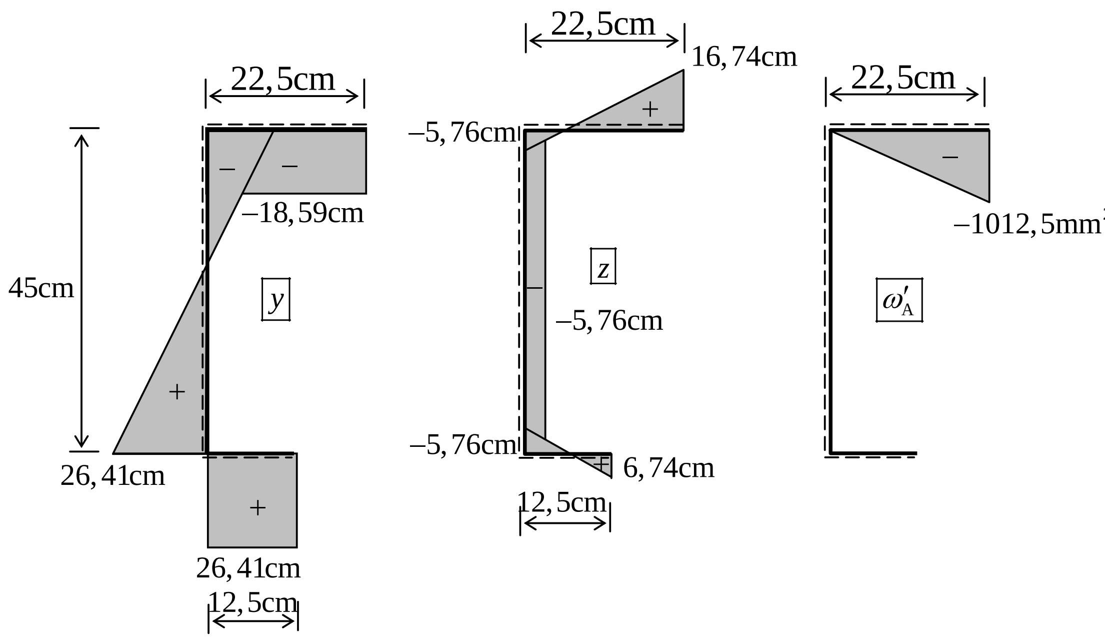
$$= 2,5\text{cm} \cdot \frac{22,5\text{cm}}{2} \cdot (-5,76\text{cm} + 16,74\text{cm}) \cdot (-18,59\text{cm})$$

$$+ 2,5\text{cm} \cdot \frac{12,5\text{cm}}{2} \cdot (-5,76\text{cm} + 6,74\text{cm}) \cdot 26,41\text{cm}$$

$$+ 1,25\text{cm} \cdot \frac{45\text{cm}}{2}(-18,59\text{cm} + 26,41\text{cm}) \cdot (-5,76\text{cm})$$

$$= \underline{\underline{-6603,3\text{cm}^4}}$$

Lasketaan sektoriaaliset tulomomentit:



$$I_{y\omega'_A} = \int y\omega'_A t\,ds = t_f \int_{f_1} y\omega'_A\,ds = 2,5\text{cm}\cdot\frac{22,5\text{cm}}{2}(-1012,5\text{cm}^2)(-18,59\text{cm})$$

$$= \underline{\underline{529379,3\text{cm}^5}}$$

$$I_{z\omega'_A} = \int z\omega'_A t\,ds = t_f \int_{f_1} z\omega'_A\,ds = 2,5\text{cm}\cdot\frac{22,5\text{cm}}{6}(-1012,5\text{cm}^2)(-5,76\text{mm}+2\cdot 16,74\text{cm})$$

$$= \underline{\underline{-263123,4\text{m}^5}}$$

(e) Lasketaan vääntökeskiön koordinaatit:

$$y_V = y_A + \frac{I_z I_{z\omega'_A} - I_{yz} I_{y\omega'_A}}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

$$= 26,41\text{cm} + \frac{51588,0\text{mm}^4\cdot(-263123,4\text{cm}^5) - (-6603,3\text{mm}^4)\cdot 529379,3\text{cm}^5}{6349,1\text{mm}^4\cdot 51588,0\text{mm}^4 - (-6603,3\text{mm}^4)}$$

$$= \underline{\underline{-9,085\text{cm}}}$$

$$z_V = z_A - \frac{I_y I_{y\omega'_A} - I_{yz} I_{z\omega'_A}}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

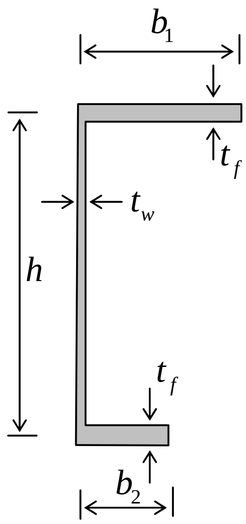
$$= -5,76\text{cm} - \frac{6349,1\text{mm}^4\cdot 529379,3\text{cm}^5 - (-6603,3\text{mm}^4)(-263123,4\text{cm}^5)}{6349,1\text{mm}^4\cdot 51588,0\text{mm}^4 - (-6603,3\text{mm}^4)^2}$$

$$= \underline{\underline{-11,478\text{cm}}}$$

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2009

Kotitehtävä 2:

Tarkastellaan edelleen kuvan poikkileikkausta.



$b_1 = 22{,}5\text{cm}$
$b_2 = 12{,}5\text{cm}$
$h = 45\text{cm}$
$t_f = 2{,}5\text{cm}$
$t_w = 1{,}25\text{cm}$

(a) Määritä poikkileikkauksen sektoriaalinen koordinaatti ω'_{V}, jonka nollapiste on O' ja napa on vääntökeskiö V, sekä piirrä ω'_{V} – kuvio.

(b) Määritä poikkileikkauksen sektoriaalinen staattinen momentti $S_{\omega'_{\mathrm{V}}}$.

(c) Määritä poikkileikkauksen normeerattu sektoriaalinen koordinaatti ω_{V}, jonka napa on vääntökeskiö V, sekä piirrä ω_{V} – kuvio.

(d) Määritä poikkileikkauksen sektoriaalinen jäyhyysmomentti $I_\omega \equiv I_{\omega_{\mathrm{V}}}$.

(e) Määritä osapoikkipinnan staattiset momentit $S_y(s)$ ja $S_z(s)$ sekä osapoikkipinnan sektoriaalinen staattinen momentti $S_\omega(s) \equiv S_{\omega_{\mathrm{V}}}(s)$. Piirrä niiden kuvaajat.

Osittainen vastaus:

(b) $S_{\omega'_{\mathrm{V}}} \approx -14359\text{cm}^4$

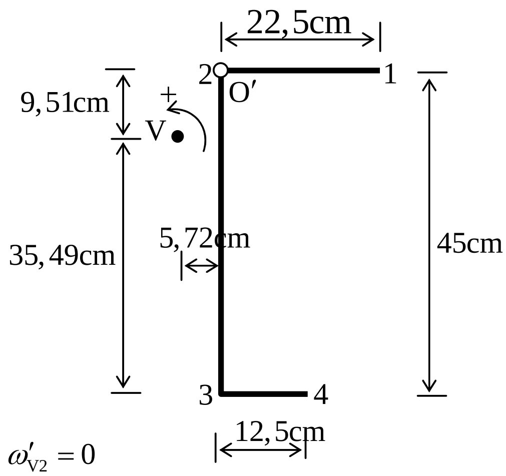
(d) $I_\omega \approx 1216400\text{cm}^6$

Palautus pe 25.9 klo 16.00 mennessä.

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2009

Kotitehtävän 2 ratkaisu:

(a) Laskelma:



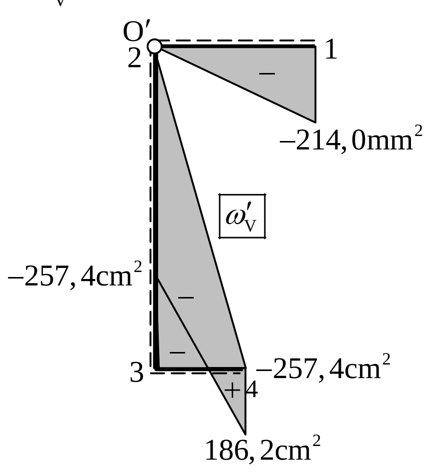
$$\omega'_{V2} = 0$$

$$\omega'_{V1} = \omega'_{V2} - h_{12}\Delta s_{12} = -9{,}51\text{cm}\cdot 22{,}5\text{cm} = -214{,}0\text{cm}^2$$

$$\omega'_{V3} = \omega'_{V2} - h_{23}\Delta s_{23} = -5{,}72\text{cm}\cdot 45\text{cm} = -257{,}4\text{cm}^2$$

$$\omega'_{V4} = \omega'_{V3} - h_{34}\Delta s_{34} = -257{,}4\text{cm}^2 + 35{,}49\text{cm}\cdot 12{,}5\text{cm} = 186{,}2\text{cm}^2$$

ω'_V – kuvio:



(b)

$$S_{\omega'_V} = \int_A \omega'_V dA = \int \omega'_V t ds = t_f \int_1^2 \omega'_V ds + t_w \int_2^3 \omega'_V ds + t_f \int_3^4 \omega'_V ds$$

$$= 2{,}5\text{cm}\cdot\frac{1}{2}22{,}5\text{cm}(-214{,}3\text{cm}^2) + 1{,}25\text{cm}\cdot\frac{1}{2}45\text{cm}(-257{,}4\text{cm}^2)$$

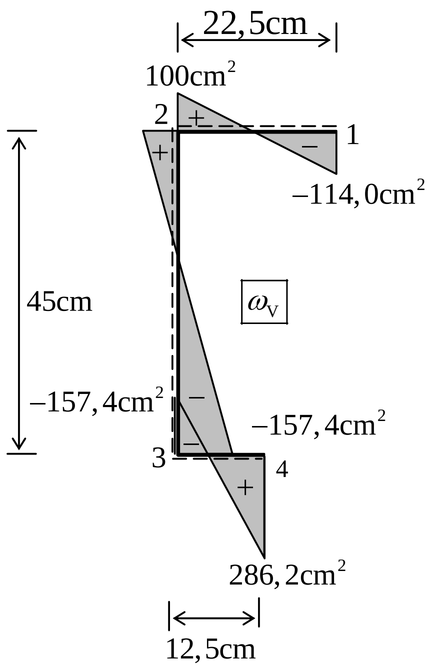
$$+ 2{,}5\text{cm}\cdot\frac{1}{2}12{,}5\text{cm}\cdot(-257{,}4\text{cm}^2 + 186{,}2\text{cm}^2) = \underline{\underline{-14379{,}1\text{cm}^4}}$$

(c) Normeeraus:

$$A = 22,5\text{cm} \cdot 2,5\text{cm} + 45\text{cm} \cdot 1,25\text{cm} + 12,5\text{cm} \cdot 2,5\text{cm} = 143,75\text{cm}^2$$

$$\omega_\text{V} = \omega'_\text{V} - \frac{S_{\omega'_\text{V}}}{A} = \omega'_\text{V} - \frac{-14379,1\text{cm}^4}{143,75\text{cm}^2} = \omega'_\text{V} + 100,0\text{cm}^2$$

ω_V – kuvio:



(d)

$$I_\omega \equiv I_{\omega_\text{V}} = \int_A \omega_\text{V}^2 dA = \int \omega_\text{V}^2 t ds = t_f \int_1^2 \omega_\text{V}^2 ds + t_w \int_2^3 \omega_\text{V}^2 ds + t_f \int_3^4 \omega_\text{V}^2 ds$$

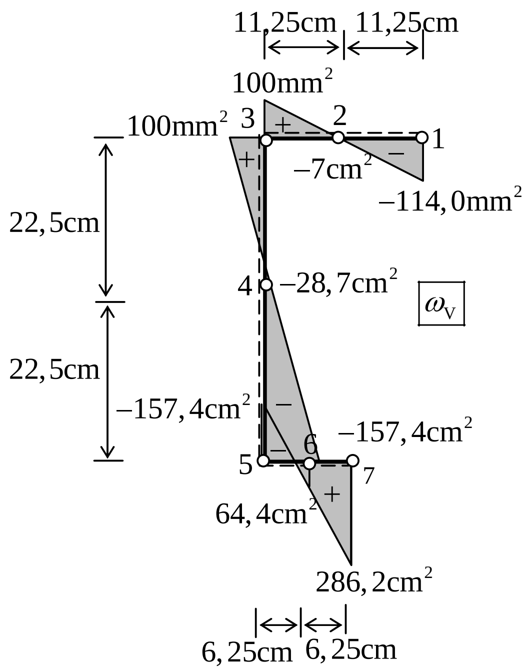
$$= 2,5\text{cm} \cdot \frac{22,5\text{cm}}{3}[(-114\text{cm}^2)^2 - 114\text{cm}^2 \cdot 100\text{cm}^2 + (100\text{cm}^2)^2]$$

$$+1,25\text{cm} \cdot \frac{45\text{cm}}{3}[(100\text{cm}^2)^2 + 100\text{cm}^2 \cdot (-157,4\text{cm}^2) + (-157,4\text{cm}^2)^2]$$

$$+2,5\text{cm} \cdot \frac{12,5\text{cm}}{3}[(-157,4\text{cm}^2)^2 - 157,4\text{cm}^2 \cdot 286,3\text{cm}^2 + (286,3\text{cm}^2)^2]$$

$$= 217425\text{cm}^6 + 356902\text{cm}^6 + 642488\text{cm}^6 = \underline{\underline{1216815\text{cm}^6}}$$

(e)



$$S_{\omega 1} = 0$$

$$S_{\omega 2} = S_{\omega 1} - t_f \int_1^2 \omega_V ds = -2,5\text{cm} \cdot \frac{1}{2} 11,25\text{cm} \cdot (-114\text{cm}^2 - 7\text{cm}^2) = 1701,6\text{cm}^4$$

$$S_{\omega 3} = S_{\omega 2} - t_f \int_2^3 \omega_V ds = 1701,6\text{cm}^4 - 2,5\text{cm} \cdot \frac{1}{2} 11,25\text{cm} \cdot (-7\text{cm}^2 + 100\text{cm}^2) = 393,8\text{cm}^4$$

$$S_{\omega 4} = S_{\omega 3} - t_w \int_3^3 \omega_V ds = 393,8\text{cm}^4 - 1,25\text{cm} \cdot \frac{1}{2} 22,5\text{cm} \cdot (100\text{cm}^2 - 28,7\text{cm}^2) = -608,9\text{cm}^4$$

$$S_{\omega 5} = S_{\omega 4} - t_w \int_4^5 \omega_V ds = -608,9\text{cm}^4 - 1,25\text{cm} \cdot \frac{1}{2} 22,5\text{cm} \cdot (-28,7\text{cm}^2 - 157,4\text{cm}^2) = 4625,2\text{cm}^4$$

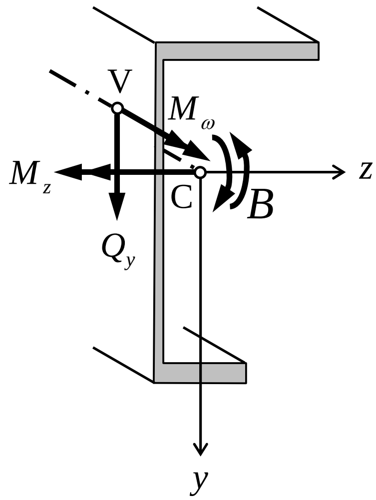
$$S_{\omega 6} = S_{\omega 5} - t_f \int_5^6 \omega_V ds = 4625,2\text{cm}^4 - 2,5\text{cm} \cdot \frac{1}{2} 6,25\text{cm} \cdot (-157,4\text{cm}^2 + 64,4\text{cm}^2) = 5351,8\text{cm}^4$$

$$S_{\omega 7} = S_{\omega 6} - t_f \int_6^7 \omega_V ds = 5351,8\text{cm}^4 - 2,5\text{cm} \cdot \frac{1}{2} 6,25\text{cm} \cdot (64,4\text{cm}^2 + 286,2\text{cm}^4) = 2612,7\text{cm}^4$$

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2009

Kotitehtävä 3:

Tarkastellaan palkkia, jolla on kotitehtävässä 1 käsitelty poikkileikkaus. Palkin tarkasteltavassa poikkileikkauksessa vaikuttavat kuvan mukaiset jännitysresultantit.



$M_z = 150\text{kNm},$

$B = 3\text{kNm}^2,$

$Q_y = 100\text{kN},$

$M_\omega = 10\text{kNm},$

$M_t = 4\text{kNm}.$

Määritä normaalijännityksen $\sigma_x(s)$ ja keskiviivan suuntaisen keskimääräisen leikkausjännityksen $\bar{\tau}_{xs}(s)$ jakautumakuviot pitkin poikkileikkauksen keskiviivaa sekä niiden itseisarvoltaan suurimmat arvot. Määritä vielä likiarvo poikkileikkauksen suurimmalle (kokonais-) leikkausjännitykselle sekä selvitä, missä kohdin poikkileikkausta se vaikuttaa.

Osittainen vastaus:

$\sigma_x,_{\max} = 182,7\text{MPa}$

$\bar{\tau}_{xs},_{\max} = 28,3\text{MPa}$

$\tau_{xs,\max} = 61,4\text{MPa}$

Palautus pe 2.10 klo 16.00 mennessä.

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2009

Kotitehtävä 3 ratkaisu:

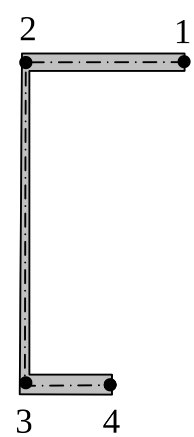
Kotitehtävän 1 tarvittavat tulokset:

Poikkileikkaussuureet:

$$I_y = 0,63491 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4$$
$$I_z = 5,1588 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4$$
$$I_{yz} = -0,66033 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4$$
$$I_\omega = 1,2164 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^6$$

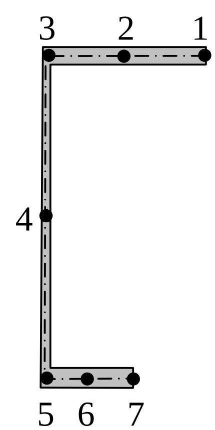
Koordinaatit $y(s)$ ja $z(s)$ sekä sektoriaalinen koordinaatti $\omega(s)$:

i	$y(s_i)$ [m]	$z(s_i)$ [m]	$\omega(s_i)$ [m^2]
1	$-0,185870$	$0,167391$	$-0,01140181$
2	$-0,185870$	$-0,057609$	$0,00998856$
3	$0,264130$	$-0,057609$	$-0,01573737$
4	$0,264130$	$0,067391$	$0,02862909$



Osapoikkipinnan staattiset momentit $S_y(s)$ ja $S_z(s)$ sekä sektoriaalinen staattinen momentti $S_\omega(s)$:

i	$S_y(s_i)$ [m^3]	$S_z(s_i)$ [m^3]	$S_\omega(s_i)$ [cm^4]
1	0	0	0
2	$-3,126 \cdot 10^{-4}$	$5,228 \cdot 10^{-4}$	$1,7027 \cdot 10^{-5}$
3	$-3,088 \cdot 10^{-4}$	$10,455 \cdot 10^{-4}$	$0,3975 \cdot 10^{-5}$
4	$1,467 \cdot 10^{-4}$	$12,519 \cdot 10^{-4}$	$-0,6030 \cdot 10^{-5}$
5	$0,153 \cdot 10^{-4}$	$8,254 \cdot 10^{-4}$	$2,0143 \cdot 10^{-5}$
6	$0,565 \cdot 10^{-4}$	$4,127 \cdot 10^{-4}$	$2,7402 \cdot 10^{-5}$
7	0	0	0



Normaalijännitykselle saadaan:

$$\sigma_x(s) = \frac{\overbrace{N}^{0}}{A} + \frac{I_y M_z - I_{yz}\overbrace{M_y}^{0}}{I_y I_z - I_{yz}^2} y(s) + \frac{I_z \overbrace{M_y}^{0} - I_{yz} M_z}{I_y I_z - I_{yz}^2} z(s) + \frac{B}{I_\omega}\omega(s)$$

$$= \frac{0,63491 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4 \cdot 150\,\mathrm{kNm}}{0,63491 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4 \cdot 5,1588 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4 - (-0,66033 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4)^2} y(s)$$

$$- \frac{-0,66033 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4 \cdot 150\,\mathrm{kNm}}{0,63491 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4 5,1588 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4 - (-0,66033 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4)^3} z(s)$$

$$+ \frac{3\,\mathrm{kNm}^2}{1,2164 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^6}\omega(s)$$

$$= \underline{3,3631 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^3} y(s) + 3,4978 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^3} z(s) + 2,4663 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^4}\omega(s)}$$

Keskiviivan suuntaiselle keskimääräiselle leikkausjännitykselle saadaan:

$$\overline{\tau}_{xs}(s) = \frac{I_y Q_y - I_{yz}\overbrace{Q_z}^{0}}{I_y I_z - I_{yz}^2}\frac{S_z(s)}{t(s)} + \frac{I_z \overbrace{Q_z}^{0} - I_{yz} Q_y}{I_y I_z - I_{yz}^2}\frac{S_y(s)}{t(s)} + \frac{M_\omega}{I_\omega}\frac{S_\omega(s)}{t(s)}$$

$$= \frac{0,63491 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4 \cdot 100\,\mathrm{kN}}{0,63491 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4 \cdot 5,1588 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4 - (-0,66033 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4)^2}\frac{S_z(s)}{t(s)}$$

$$- \frac{-0,66033 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4 \cdot 100\,\mathrm{kN}}{0,63491 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4 \cdot 5,1588 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4 - (-0,66033 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4)^2}\frac{S_y(s)}{t(s)}$$

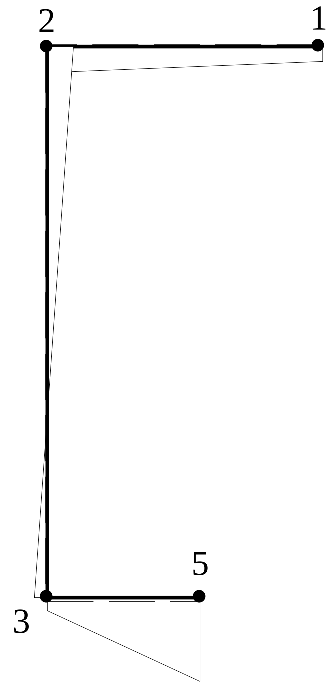
$$+ \frac{10\,\mathrm{kNm}}{1,2164 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^6}\frac{S_\omega(s)}{t(s)}$$

$$= \underline{2,2361 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^4}\frac{S_z(s)}{t(s)} + 2,3256 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^4}\frac{S_y(s)}{t(s)}}$$

$$\underline{+8,2210 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^5}\frac{S_\omega(s)}{t(s)}}$$

Normaalijännitys:

i	$\sigma_x(s_i)$ [MPa]
1	$-32{,}07$
2	$-58{,}03$
3	$29{,}69$
4	$182{,}7$

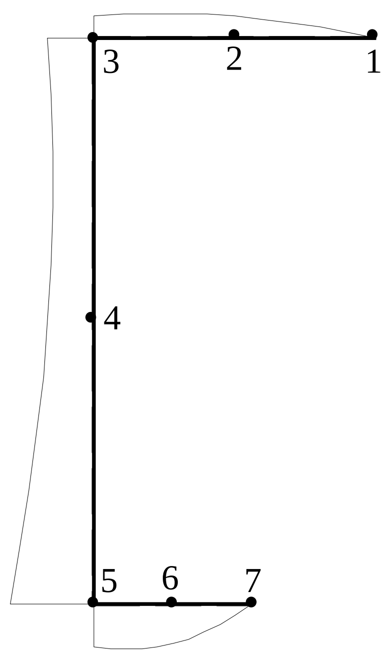


Suurin normaalijännitys on alalaipan oikeassa päässä ja sillä on arvo:

$$\underline{\underline{\sigma_{x,\max} = 182{,}7\,\text{MPa}}}$$

Keskiviivan suuntainen keskimääräinen leikkausjännitys:

i	$\bar{\tau}_{xs}(s_i)$ [MPa]
1	0
2	$7{,}37$
3	$7{,}79$ $15{,}57$
4	$15{,}70$
5	$28{,}30$ $14{,}15$
6	$13{,}23$
7	0



Suurin keskiviivan suuntainen keskimääräinen leikkausjännitys on uuman alapäässä ja sillä on arvo:

$$\underline{\underline{\bar{\tau}_{xs,\max} = 28{,}30\,\text{MPa}}}$$

Suuriman kokonaisleikkausjännityksen arviointi:

Vääntöjäyhyysmomentti:

$$
\begin{aligned}
I_t &= \frac{1}{3}\sum t_i^3 s_i = \frac{1}{3}(t_f^3 b_1 + t_w^3 h + t_f^3 b_2) \\
&= \frac{1}{3}[(0,025\text{m})^3 \cdot 0,225\text{m} + (0,0125\text{m})^3 \cdot 0,45\text{m} + (0,025\text{m})^3 \cdot 0,125\text{m}] \\
&= \frac{1}{3}[(0,025\text{m})^3 \cdot 0,225\text{m} + (0,0125\text{m})^3 \cdot 0,45\text{m} + (0,025\text{m})^3 \cdot 0,125\text{m}] \\
&= 2,1159 \cdot 10^{-6}\text{m}^4
\end{aligned}
$$

Vääntövastukset laipoissa ja uumassa:

$$
W_t^f = \frac{I_t}{t_f} = \frac{2,1159 \cdot 10^{-6}\text{m}^4}{0,025\text{m}} = 0,8464 \cdot 10^{-4}\text{m}^3,
$$

$$
W_t^w = \frac{I_t}{t_w} = \frac{2,1159 \cdot 10^{-6}\text{m}^4}{0,0125\text{m}} = 1,6927 \cdot 10^{-4}\text{m}^3.
$$

Maksimi Saint Venantin väännön leikkausjännitys laipoissa ja uumassa:

$$
\tau^t_{xs,f\max} = \frac{M_t}{W_t^f} = \frac{4 \cdot 10^{-3}\text{MNm}}{0,8464 \cdot 10^{-4}\text{m}^3} = \underline{47,26\text{MPa}}
$$

$$
\tau^t_{xs,w\max} = \frac{M_t}{W_t^w} = \frac{4 \cdot 10^{-3}\text{MNm}}{1,6927 \cdot 10^{-4}\text{m}^3} = \underline{23,63\text{MPa}}
$$

Koska vääntömomentti on positiivinen, nämä positiiviset leikkausjännitykset esiintyvät laippojen ja uuman positiivisella reunalla. Koska kokonaisleikkausjännitys on $\tau_{xs} = \overline{\tau}_{xs} + \tau^t_{xs}$, sen suurin arvo on laipoissa ja uumassa saadaan siellä, missä keskimääräinen leikkausjännitys $\overline{\tau}_{xs}$ on suurin. Näin saadaan

$$
\tau_{sx,f\max} = \overline{\tau}_{xs,f\max} + \tau^t_{xs,f\max} = 14,15\text{MPa} + 47,26\text{MPa} = \underline{61,41\text{MPa}}
$$

$$
\tau_{sx,w\max} = \overline{\tau}_{xs,w\max} + \tau^t_{xs,w\max} = 28,30\text{MPa} + 23,63\text{MPa} = \underline{51,93\text{MPa}}
$$

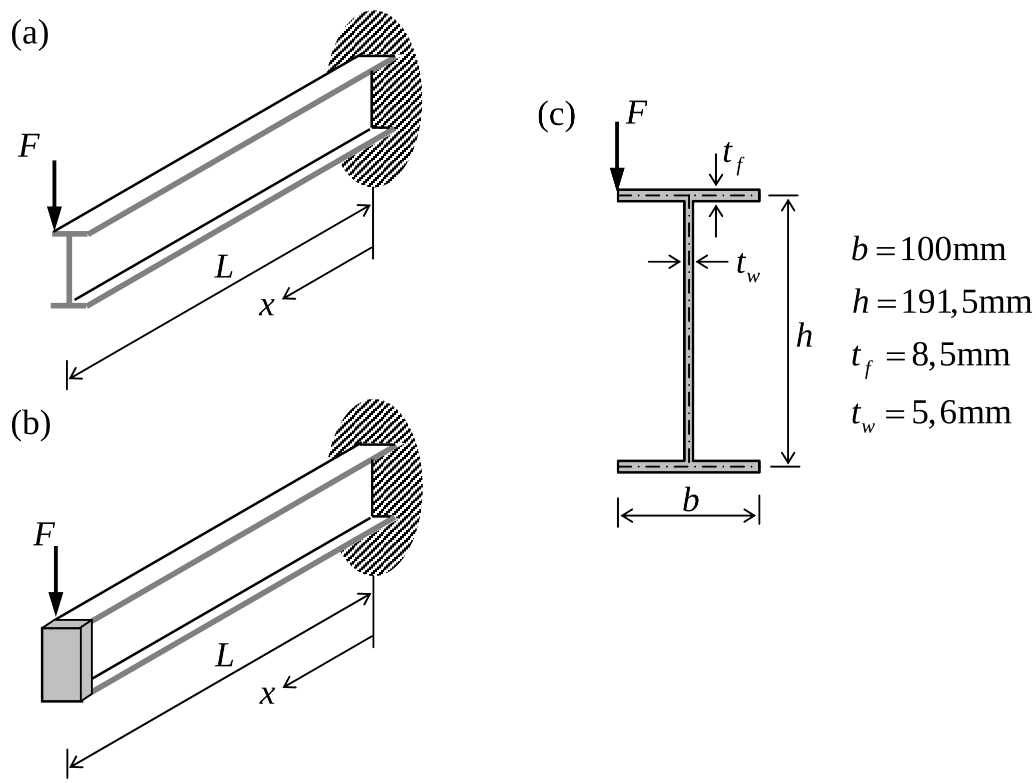
Arvio suurimalle kokonaisleikkausjännitykselle on: $\underline{\underline{\tau_{sx,\max} = 61,41\text{MPa}.}}$

Se on alalaipan alareunassa lähellä uuman ja alalaipan liitoskohtaa.

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2009

Kotitehtävä 4:

Määritä kuvan mukaisen ylälaipan nurkasta pystysuoralla pistekuormalla $F = 5\text{kN}$ kuormitetun ulokesauvan vääntökulma φ_t ulokkeen päässä sekä vääntömomenttien $M_\omega(x)$ ja $M_t(x)$ sekä bimomentin $B(x)$ jakautumakuviot (a) tapauksessa, jossa ulokkeen pää saa vapaasti käyristyä, ja (b) tapauksessa, jossa ulokkeen pään käyristyminen on estetty siihen hitsatulla jäykällä levyllä. Sauvan pituus on $L = 3\text{m}$ ja se on terästä, jonka kimmomoduuli on $E = 210000\text{N/mm}^2$ ja Poissonin vakio on $\nu = 0,3$.



Osittainen vastaus ja tarkistusarvoja:

(a) $\varphi_t(L) \approx 0{,}1303\text{rad}$, $M_t(L) \approx 2{,}380 \cdot 10^5\,\text{Nmm}$,

$M_\omega(L) \approx 0{,}120 \cdot 10^5\,\text{Nmm}$, $B(0) \approx -2{,}009 \cdot 10^8\,\text{Nmm}^2$

(b) $\varphi_t(L) \approx 0{,}0870\text{rad}$, $M_t(L) = 0$, $M_\omega(L) = 2{,}5 \cdot 10^5\,\text{Nmm}$,

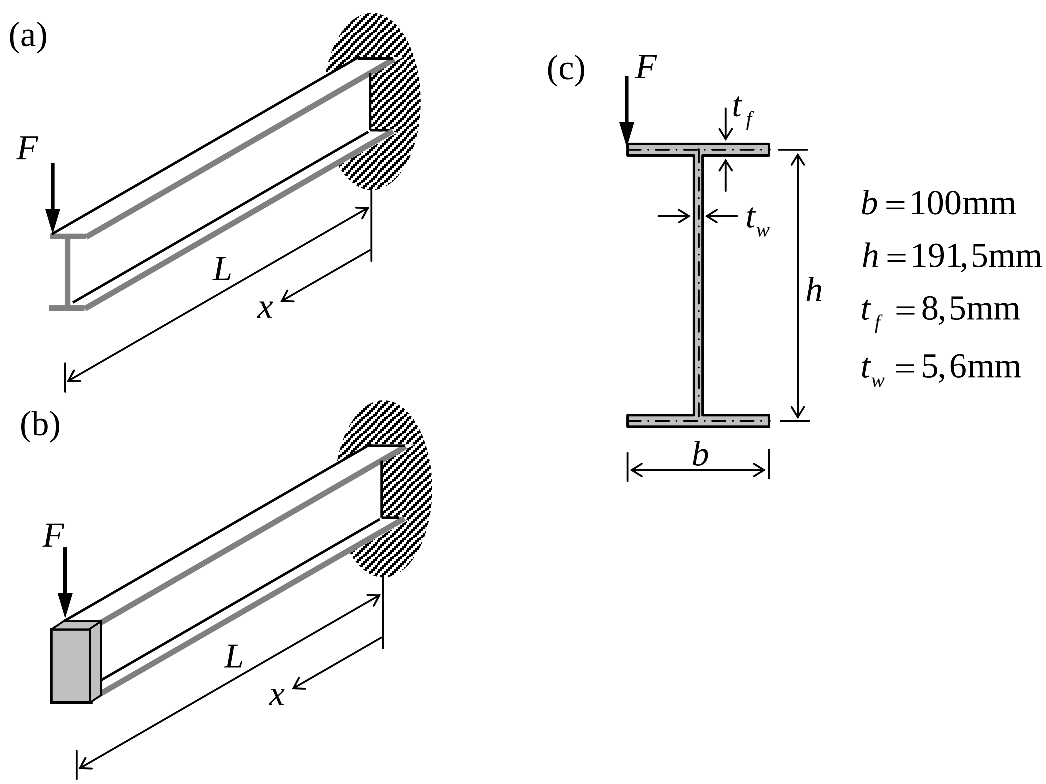
$B(L) \approx 1{,}917 \cdot 10^8\,\text{Nmm}^2$

Palautus pe 9.10 klo 16.00 mennessä.

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2009

Kotitehtävä 4:

Määritä kuvan mukaisen ylälaipan nurkasta pystysuoralla pistekuormalla $F = 5\text{kN}$ kuormitetun ulokesauvan vääntökulma φ_t ulokkeen päässä sekä vääntömomenttien $M_\omega(x)$ ja $M_t(x)$ sekä bimomentin $B(x)$ jakautuma-kuviot (a) tapauksessa, jossa ulokkeen pää saa vapaasti käyristyä, ja (b) tapauksessa, jossa ulokkeen pään käyristyminen on estetty siihen hitsatulla jäykällä levyllä. Sauvan pituus on $L = 3\text{m}$ ja se on terästä, jonka kimmomoduuli on $E = 210000\text{N/mm}^2$ ja Poissonin vakio on $\nu = 0{,}3$.



Ratkaisu:

Poikkileikkaussuureita:

$$I_t = \frac{1}{3}(2t_f^3 b + t_w^3 h) = 5{,}2152 \cdot 10^4 \,\text{mm}\,,\ I_\omega = \frac{t_f h^2 b^3}{24} = 1{,}2988 \cdot 10^{10}\,\text{mm}^6$$

Kerroin k:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 0{,}80769 \cdot 10^5\,\text{N/mm}^2\,,\ k = L\sqrt{\frac{GI_t}{EI_\omega}} = 3{,}7282$$

Yksityisratkaisusuureet:

$$\varphi_{tm} = 0 \ \Rightarrow\ \theta_m = 0,\ B_m = 0,\ \text{jne.}$$

Vääntävä momentti sauvan päässä:

$$\bar{M} = F \cdot \frac{b}{2} = \frac{Fb}{2} = \frac{5000\,\text{N} \cdot 100\,\text{mm}}{2} = 2{,}5 \cdot 10^5\,\text{Nmm}$$

Ratkaisusuureet integrointivakioiden avulla:

$$\varphi_t(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \sinh(\frac{k}{L}x) + C_4 \cosh(\frac{k}{L}x)$$
$$\theta(x) = C_2 + C_3 \frac{k}{L}\cosh(\frac{k}{L}x) + C_4 \frac{k}{L}\sinh(\frac{k}{L}x)$$
$$M_t(x) = GI_t[C_2 + C_3 \frac{k}{L}\cosh(\frac{k}{L}x) + C_4 \frac{k}{L}\sinh(\frac{k}{L}x)]$$
$$B(x) = -GI_t[C_3 \sinh(\frac{k}{L}x) + C_4 \cosh(\frac{k}{L}x)]$$
$$M_\omega(x) = -GI_t[C_3 \frac{k}{L}\cosh(\frac{k}{L}x) + C_4 \frac{k}{L}\sinh(\frac{k}{L}x)]$$
$$M_x(x) = GI_t C_2$$

(a) Reunaehtojen huomiointi:

$$\varphi_t(0) \equiv C_1 + C_4 = 0,$$
$$\theta(0) \equiv C_2 + C_3 \frac{k}{L} = 0,$$

$$B(L) \equiv -GI_t(C_3 \sinh k + C_4 \cosh k) = 0,$$
$$M_x(L) \equiv GI_t C_2 = \bar{M}.$$

$$\Rightarrow \; C_1 = -\frac{L}{k}\frac{\bar{M}}{GI_t}\tanh k,\; C_2 = \frac{\bar{M}}{GI_t},\; C_3 = -\frac{L}{k}\frac{\bar{M}}{GI_t},\; C_4 = \frac{L}{k}\frac{\bar{M}}{GI_t}\tanh k$$

Ratkaisu:

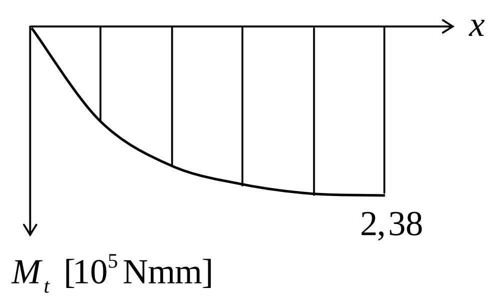
$$\varphi_t(x) = \frac{\bar{M}L}{GI_t}\left[-\frac{\tanh k}{k} + \frac{x}{L} - \frac{1}{k}\sinh\left(\frac{k}{L}x\right) + \frac{\tanh k}{k}\cosh\left(\frac{k}{L}x\right)\right],$$
$$M_t(x) = \bar{M}\left[1 - \cosh\left(\frac{k}{L}x\right) + \tanh k \sinh\left(\frac{k}{L}x\right)\right],$$
$$B(x) = \frac{\bar{M}L}{k}\left[\sinh\left(\frac{k}{L}x\right) - \tanh k \cosh\left(\frac{k}{L}x\right)\right],$$
$$M_\omega(x) = \bar{M}\left[\cosh\left(\frac{k}{L}x\right) - \tanh k \sinh\left(\frac{k}{L}x\right)\right],$$

Vääntökulma palkin päässä:

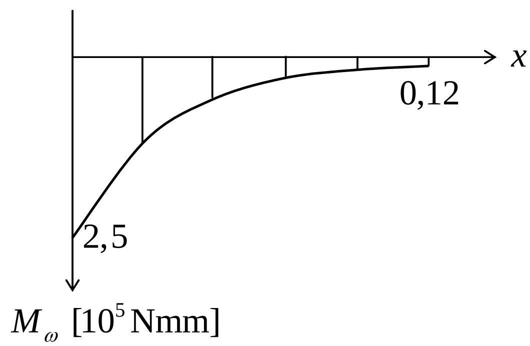
$$\varphi_t(L) = \frac{\bar{M}L}{GI_t}\left(1 - \frac{\tanh k}{k}\right) = \underline{\underline{0{,}1303\,\text{rad}}}$$

Vääntömomenttien ja bimomentin kuvaajat:

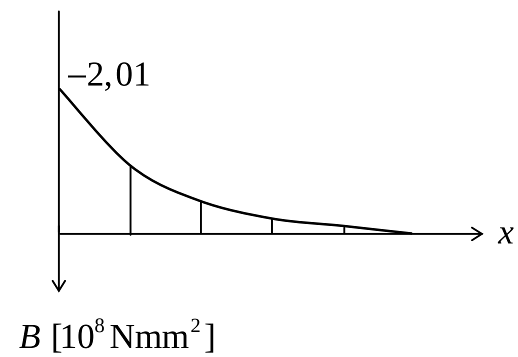
x [m]	M_t [Nmm]
0	0
0,6	$1{,}31 \cdot 10^5$
1,2	$1{,}93 \cdot 10^5$
1,8	$2{,}22 \cdot 10^5$
2,4	$2{,}34 \cdot 10^5$
3	$2{,}38 \cdot 10^5$



x [m]	M_ω [Nmm]
0	$2,5\cdot 10^5$
0,6	$1,19\cdot 10^5$
1,2	$0,57\cdot 10^5$
1,8	$0,28\cdot 10^5$
2,4	$0,16\cdot 10^5$
3	$0,12\cdot 10^5$



x [m]	B [Nmm^2]
0	$-2,01\cdot 10^8$
0,6	$-0,95\cdot 10^8$
1,2	$-0,45\cdot 10^8$
1,8	$-0,20\cdot 10^8$
2,4	$-0,08\cdot 10^8$
3	0



(b) Reunaehtojen huomiointi:

$$\varphi_t(0) \equiv C_1 + C_4 = 0,$$

$$\theta(0) \equiv C_2 + C_3 \frac{k}{L} = 0,$$

$$\theta(L) \equiv C_2 + C_3 \frac{k}{L}\cosh k + C_4 \frac{k}{L}\sinh k = 0,$$

$$M_x(L) \equiv GI_t C_2 = \bar{M}.$$

$$\Rightarrow\ C_1 = -\frac{\bar{M}}{GI_t}\frac{L}{k}\frac{\cosh k - 1}{\sinh k},\ C_2 = \frac{\bar{M}}{GI_t},\ C_3 = -\frac{L}{k}\frac{\bar{M}}{GI_t},\ \ C_4 = \frac{\bar{M}}{GI_t}\frac{L}{k}\frac{\cosh k - 1}{\sinh k}$$

Ratkaisu:

$$\varphi_t(x) = \frac{\bar{M}L}{GI_t}\{\frac{x}{L} - \frac{1}{k}\sinh(\frac{k}{L}x) + \frac{\cosh k - 1}{k\sinh k}[\cosh(\frac{k}{L}x) - 1]\},$$

$$M_t(x) = \bar{M}[1 - \cosh(\frac{k}{L}x) + \frac{\cosh k - 1}{\sinh k}\sinh(\frac{k}{L}x)],$$

$$B(x)=\frac{\bar{M}L}{k}[\sinh(\frac{k}{L}x)-\frac{\cosh k-1}{\sinh k}\cosh(\frac{k}{L}x)],$$

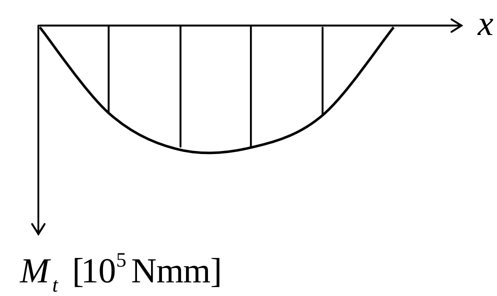
$$M_\omega(x)=\bar{M}[\cosh(\frac{k}{L}x)-\frac{\cosh k-1}{\sinh k}\sinh(\frac{k}{L}x)],$$

Vääntökulma palkin päässä:

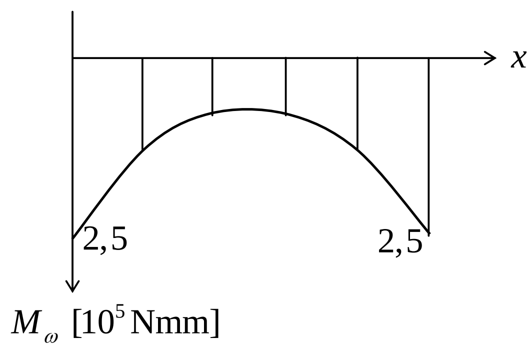
$$\varphi_t(L)=\frac{\bar{M}L}{GI_t}(1+2\frac{1-\cosh k}{k\sinh k})\approx \underline{\underline{0,0870\text{rad}}}$$

Vääntömomenttien ja bimomentin kuvaajat:

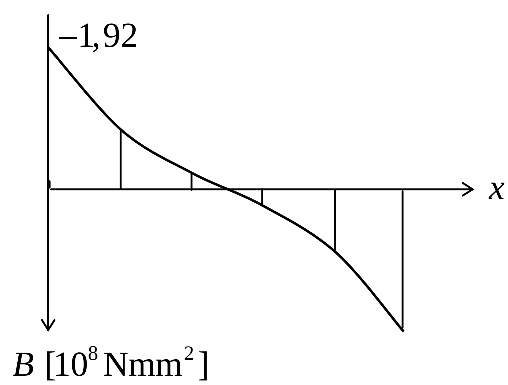
x [m]	M_t [Nmm]
0	0
0,6	$1,22\cdot 10^5$
1,2	$1,69\cdot 10^5$
1,8	$1,69\cdot 10^5$
2,4	$1,22\cdot 10^5$
3	0



x [m]	M_ω [Nmm]
0	$2,5\cdot 10^5$
0,6	$1,28\cdot 10^5$
1,2	$0,81\cdot 10^5$
1,8	$0,81\cdot 10^5$
2,4	$1,28\cdot 10^5$
3	$2,5\cdot 10^5$



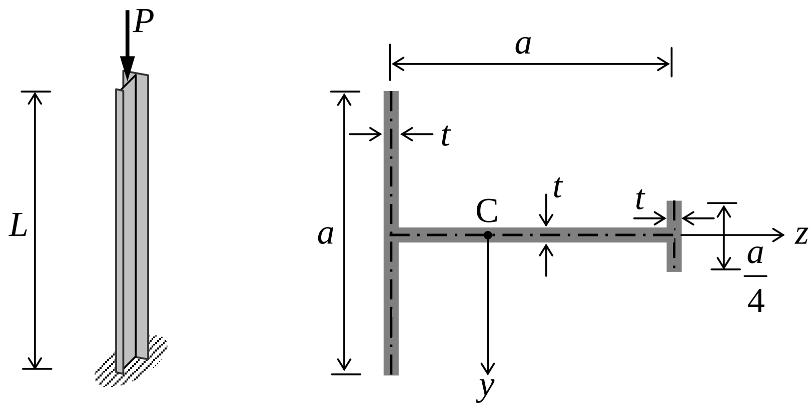
x [m]	B [Nmm^2]
0	$-1,92\cdot 10^8$
0,6	$-0,83\cdot 10^8$
1,2	$-0,23\cdot 10^8$
1,8	$-0,23\cdot 10^8$
2,4	$-0,83\cdot 10^8$
3	$1,92\cdot 10^8$



Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2009

Kotitehtävä 5:

Oheinen sauva on yläpäästä vapaa ja alapäästään jäykästi kiinnitetty. Kuinka suurella keskeisen puristavan kuorman *P* arvolla sauva nurjahtaa? Sauvan pituus on $L = 10a$, seinämien paksuus on $t = a/15$ ja liukumoduuli on $G = 0,4E$.



V*astaus:*

$P_{\mathrm{kr}} = 1{,}161 \cdot 10^{-4} Ea^2$

Palautus pe 16.10 klo 16.00 mennessä.

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2009

Kotitehtävä 5 ratkaisu:

Kaavakokoelman taulukoita käyttäen saadaan poikkileikkaussuureita:

$$e_{\mathrm{C}} = \frac{ta^2/2 + t\cdot a^2}{ta + ta + ta/4} = \frac{2}{3}a$$

$$I_z = \frac{ta^3}{12} + \frac{t(\frac{a}{4})^3}{12} = \frac{13}{2304}a^4 \approx 5{,}6424\cdot 10^{-3}a^4$$

$$I_y = \frac{ta^3}{12} + ta(e_{\mathrm{C}} - \frac{a}{2})^2 + ta(a - e_{\mathrm{C}})^2 + t\frac{a}{4}\cdot e_{\mathrm{C}}^2 = \frac{1}{45}a^4 \approx 22{,}222\cdot 10^{-3}a^4$$

$$I_{yz} = 0$$

$$e_{\mathrm{V}} = \frac{ta^3 a}{ta^3 + t(a/4)^3} = \frac{64}{65}a$$

$$I_t = \frac{1}{3}(t^3 a + t^3\frac{a}{4} + t^3 a) = \frac{a^4}{4500} \approx 2{,}2222\cdot 10^{-4}a^4$$

$$I_\omega = \frac{tta^3(a/4)^3 a^2}{12[ta^3 + t(a/4)^3]} = \frac{a^6}{11700} \approx 8{,}5701\cdot 10^{-5}a^6$$

$$z_{\mathrm{V}} = -(e_{\mathrm{C}} - e_{\mathrm{V}}) = -(\frac{2}{3}a - \frac{64}{65}a) = -\frac{62}{195}a \approx -0{,}31795a$$

Poikkileikkaussuureelle r^2 saadaan:

$$r^2 = \frac{I_y + I_z}{A} + y_{\mathrm{V}}^2 + z_{\mathrm{V}}^2 = \frac{\frac{1}{45}a^4 + \frac{13}{2304}a^4}{\frac{9}{4}a\cdot\frac{a}{15}} + (\frac{62}{195})^2 \approx 0{,}28686a^2$$

Nurjahduspituus:

$$L_n = 2L = 20a$$

Puhtaiden taivutus- ja vääntönurjahdustapausten kriittiset kuormat:

$$P_v = \frac{\pi^2 EI_z}{L_n^2} = \frac{\pi^2 E \cdot \frac{13}{2304} a^4}{(20a)^2} = 1,39220 \cdot 10^{-4} Ea^2$$

$$P_w = \frac{\pi^2 EI_y}{L_n^2} = \frac{\pi^2 E \cdot \frac{1}{45} a^4}{(20a)^2} = 5,48311 \cdot 10^{-4} Ea^2$$

$$P_\varphi = \frac{1}{r^2}(\frac{\pi^2 EI_\omega}{L_n^2} + GI_t) = \frac{1}{0,28686a^2}[\frac{\pi^2 E \cdot \frac{a^6}{11700}}{(20a)^2} + 0,4E \cdot \frac{a^4}{4500}] = 3,21706 \cdot 10^{-4} Ea^2$$

Ehto kriittiselle kuormalle:

$$\begin{vmatrix} P_v - P & 0 & -z_\text{V} P \\ 0 & P_w - P & \overbrace{y_\text{V}}^{0} P \\ -z_\text{V} P & \overbrace{y_\text{V}}^{0} P & r^2 P_\varphi - r^2 P \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} P_v - P & 0 & -z_\text{V} P \\ 0 & P_w - P & 0 \\ -z_\text{V} P & 0 & r^2 P_\varphi - r^2 P \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow\; (P_w - P)\begin{vmatrix} P_v - P & -z_\text{V} P \\ -z_\text{V} P & r^2(P_\varphi - P) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow\; (P_w - P)[(P_v - P)r^2(P_\varphi - P) - z_\text{V}^2 P^2] = 0$$

$$\Rightarrow\; (P_w - P)[(r^2 - z_\text{V}^2)P^2 - r^2(P_v + P_\varphi)P + r^2 P_v P_\varphi] = 0$$

$$\Rightarrow\; P_1 = P_w,\; (r^2 - z_\text{v}^2)P^2 - r^2(P_v + P_\varphi)P + r^2 P_v P_\varphi = 0$$

$$P_1 = \underline{5,48311 \cdot 10^{-4} Ea^2}$$

$$[0,28686a^2 - (-\frac{62}{195}a)^2] \cdot P^2 - 0,28686a^2 \cdot (1,39220 + 3,21706) \cdot 10^{-4} Ea^2 \cdot P$$

$$+0,28686a^2 \cdot 1,39220 \cdot 10^{-4} \cdot 3,21706 \cdot 10^{-4} E^2 a^4 = 0$$

$$\Rightarrow 0,18577 \cdot P^2 - 1,32221 \cdot 10^{-6} Ea^2 \cdot P + 1,28479 \cdot 10^{-8} E^2 a^4 = 0$$

$$\Rightarrow P_2 = \underline{5,8563 \cdot 10^{-4} Ea^2},\; P_3 = \underline{1,1611 \cdot 10^{-4} Ea^2}$$

Kriittinen kuorma:

$$P_\text{kr} = \underline{\underline{1,161 \cdot 10^{-4} Ea^2}}$$

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2009

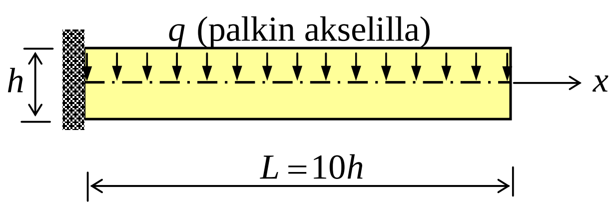
Kotitehtävä 6:

Voidaan osoittaa, että differentiaaliyhtälö (5.9), eli

$$(GI_t + 2\beta_y M_z^0)\varphi_t'' + 2\beta_y Q_y^0 \varphi_t' + [\frac{(M_z^0)^2}{EI_y} - q_y^0(y_q - y_\mathrm{V})]\varphi_t = 0 ,$$

soveltuu myös ulokepalkin kiepahdukseen, kun palkkia kuormittaa jakautunut kuorma $q_y^0(x)$. Reunaehtoyhtälö palkin vasemmassa, kiinnitetyssä päässä ($x = 0$) on $\varphi_t(0) = 0$ ja oikeassa, vapaassa päässä ($x = L$) on $\varphi_t'(L) = 0$.

Tarkastellaan oheista tasaisen kuorman q kuormittamaa ulokepalkkia, jonka poikkileikkaus on suorakaide, jonka korkeus on h. Määritä likilauseke palkin kiepahduskuormalle q_kr käyttäen differenssimenetelmää ja differenssijakoa $\Delta x = L/3$. Määritä ja piirrä myös palkin kiepahdusmuoto $\varphi_t(x)$, joka saa arvon 1 ulokkeen päässä. Palkin pituus $L = 10h$, leveys on $b = h/10$ kimmomoduuli on E, liukumoduuli on $G = 0,4E$.



Taustamateriaali:
Differenssimenetelmää käsittelevä liite LI_B.pdf sekä siihen liittyvät esimerkit EI_B.pdf, erityisesti esimerkki B7.

Ohjeita:
Muodosta kenttäyhtälöä vastaava differenssiyhtälö ja saata se muotoon
$-\varphi_{ti-1} + 2\varphi_{ti} - \varphi_{ti+1} - \lambda f_i \varphi_{ti} = 0$,
missä

$$\lambda = \frac{q^2 L^6}{EI_y GI_t}, \quad f_i = \frac{1}{4}\frac{\Delta x^2}{L^2}(1 - \frac{x_i}{L})^4 .$$

Tässä tehtävässä voit tehdä differenssiverkon siten, että differenssipiste 1 on palkin vasemmassa päässä, piste 4 on palkin oikeassa päässä ja piste 5 on ulkoinen differenssipiste. Muodosta kenttäyhtälöä vastaavat differenssiyhtälöt verkon sisäpisteissä 2, 3 ja 4 ja reunaehtoa vastaavat yhtälöt differenssipisteissä 1 ja 4. Eliminoi jälkimmäisiä yhtälöitä käyttäen pisteiden 1 ja 5 vääntökulmat φ_{t1} ja φ_{t5} edellisistä. Näin saat ominaisarvotehtävän, jonka pienimmän ominaisarvon $\lambda_{\min}$ joudut määrittämään. Sitä apuna käyttäen saat helposti kriittisen kuorman q_{kr}.

Osittainen vastaus: $q_{kr} \approx 1{,}378 \cdot 10^{-6} Eh$

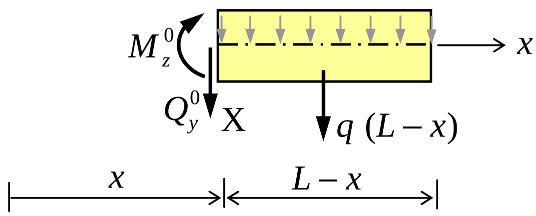
Palautus pe 30.10 klo 16.00 mennessä.

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2009

Kotitehtävän 6 ratkaisu:

Ratkaisu:

Taivutusmomentti M_z^0:



$$\text{X}\circlearrowright\quad M_z^0 + q(L-x)\cdot\frac{L-x}{2} = 0 \;\Rightarrow\; M_z^0 = \frac{qL^2}{2}(1-\frac{x}{L})^2$$

Kenttäyhtälö:

Yhtälöstä (5.6) saadaan

$$(GI_t + 2\overbrace{\beta_y}^{0} M_z^0)\varphi_t'' + 2\overbrace{\beta_y}^{0} Q_y^0\varphi_t' + [\frac{(M_z^0)^2}{EI_y} - \overbrace{q_y^0}^{q}(\overbrace{y_q}^{0} - \overbrace{y_V}^{0})]\varphi_t = 0$$

$$\Rightarrow\; \varphi_t'' + \frac{(M_z^0)^2}{EI_yGI_t}\varphi_t = 0 \;\Rightarrow\; \varphi_t'' + \frac{q^2L^4}{4GI_tEI_y}(1-\frac{x}{L})^4\varphi_t = 0$$

Kenttäyhtälöä vastaava differenssiyhtälö:

Saadaan

$$\varphi_{ti}'' + \frac{q^2L^4}{4EI_yGI_t}(1-\frac{x_i}{L})^4\varphi_{ti} = 0$$

$$\Rightarrow\; \frac{\varphi_{ti-1} - 2\varphi_{ti} + \varphi_{ti+1}}{\Delta x^2} + \frac{q^2L^4}{4EI_yGI_t}(1-\frac{x_i}{L})^4\varphi_{ti} = 0$$

$$\Rightarrow\; -\varphi_{ti-1} + 2\varphi_{ti} - \varphi_{ti+1} - \frac{q^2L^6}{EI_yGI_t}\frac{\Delta x^2}{4L^2}(1-\frac{x_i}{L})^4\varphi_{ti} = 0$$

ja edelleen

$$-\varphi_{ti-1} + 2\varphi_{ti} - \varphi_{ti+1} - \lambda f_i\varphi_{ti} = 0\,,$$

missä

$$\lambda = \frac{q^2 L^6}{EI_y GI_t}$$

ja

$$f_i = \frac{\Delta x^2}{4L^2}(1 - \frac{x_i}{L})^4 = \frac{1}{36}(1 - \frac{x_i}{L})^4 .$$

Kenttäyhtälö $\Rightarrow$

$$\begin{cases} -\varphi_{t1} + 2\varphi_{t2} - \varphi_{t3} - \lambda f_2 \varphi_{t2} = 0 \\ -\varphi_{t2} + 2\varphi_{t3} - \varphi_{t4} - \lambda f_3 \varphi_{t3} = 0 \\ -\varphi_{t3} + 2\varphi_{t4} - \varphi_{t5} - \lambda f_4 \varphi_{t4} = 0 \end{cases}$$

missä

$$f_2 = \frac{1}{36}(1 - \frac{1}{3})^4 = \frac{4}{729}, \quad f_3 = \frac{1}{36}(1 - \frac{2}{3})^4 = \frac{1}{2916}, \quad f_4 = \frac{1}{36}(1 - 1)^4 = 0$$

Reunaehtoja vastaavat differenssiyhtälöt:

$$\varphi_{t1} = 0,$$

$$\varphi'_{\mathrm{t}4} \equiv \frac{-\varphi_{t3} + \varphi_{t5}}{2\Delta x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_{\mathrm{t}5} = \varphi_{t3}$$

Reunaehtojen eliminointi $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 2\varphi_{t2} - \varphi_{t3} - \lambda f_2 \varphi_{t2} = 0 \\ -\varphi_{t2} + 2\varphi_{t3} - \varphi_{t4} - \lambda f_3 \varphi_{t3} = 0 \\ -2\varphi_{t3} + 2\varphi_{t4} - \lambda f_4 \varphi_{t4} = 0 \end{cases}$$

Ominaisarvotehtävä:

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 4/729 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2916 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \varphi_{t2} \\ \varphi_{t3} \\ \varphi_{t4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ratkaisu:

$\lambda_1 \approx 170{,}9,\ \lambda_2 \approx 3109{,}6,\ \lambda_3 \approx \infty$

Pienin ominaisarvo:

$\lambda_{\min} = \underline{170{,}9}$

Kriittinen kuorma:

$$\frac{q_{\text{kr}}^2 L^6}{EI_y GI_t} = \lambda_{\min} \ \Rightarrow\ q_{\text{kr}} = \sqrt{\lambda_{\min}}\frac{\sqrt{EI_y GI_t}}{L^3} \approx \underline{13{,}073\frac{\sqrt{EI_y GI_t}}{L^3}}$$

Poikkileikkaussuureet:

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{h(h/10)^3}{12} = \frac{h^4}{12000},\ I_t = \frac{1}{3}hb^3 = \frac{h(h/10)^3}{3} = \frac{h^4}{3000}$$

Kriittinen kuorma:

$$q_{kr} = 13{,}073\frac{\sqrt{E\dfrac{h^4}{12000}0{,}4E\dfrac{h^4}{3000}}}{(10h)^3} \approx \underline{\underline{1{,}378 \cdot 10^{-6} Eh}}$$

Nurjahdusmuodon määrittäminen:

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} - 170{,}9\begin{bmatrix} 4/729 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2916 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} \varphi_{t2} \\ \varphi_{t3} \\ \varphi_{t4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1{,}062 & -1 & 0 \\ -1 & 1{,}941 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varphi_{t2} \\ \varphi_{t3} \\ \varphi_{t4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_{t2} = 1/1{,}0623\varphi_{t3} \\ \varphi_{t3} = \overbrace{\varphi_{t4}}^{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_{t2} = 0{,}941 \\ \varphi_{t3} = 1 \\ \varphi_{t4} = 1 \end{cases}$$

Vääntökulman kiepahdusmuoto: