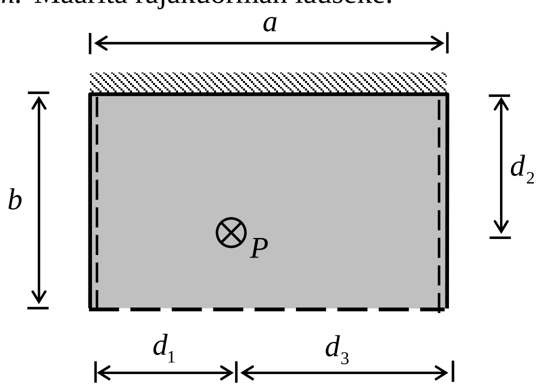
Osa IV: Laattojen myötöviivateoriaa

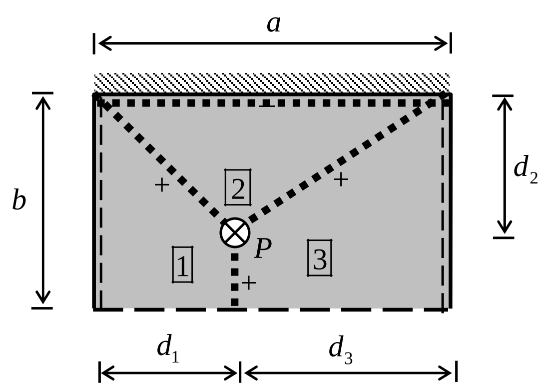
6. Esimerkkejä rajakuorman määrittämisestä ja rajamitoituksesta[1].

Tehtävä 6.1:

Oheista suorakaidelaattaa kuormittaa pistekuorma P kuvan mukaisesti. Sen positiivista myötöviivaa vastaava täysplastinen momentti on m ja negatiivista vastaava m' siten, että $m' = \gamma m.$ Määritä rajakuorman lauseke.



Ratkaisu:



$$\omega_1 = \frac{1}{d_1},$$

$$\omega_2 = \frac{1}{d_2},$$

$$\omega_3 = \frac{1}{d_3}.$$

Sisäinen virtuaalinen työ:

$$-W_{\text{int}} = m \cdot b \cdot \omega_1 + (m + m')a \cdot \omega_2 + m \cdot b \cdot \omega_2 == m \cdot b \cdot \frac{1}{d_1} + (m + \overbrace{m'}^{\gamma m})a \cdot \frac{1}{d_1} + m \cdot b \cdot \frac{1}{d_3}$$

$$= m[\frac{b}{d_1} + (1+\gamma)\frac{a}{d_2} + \frac{b}{d_3}]$$

Ulkoinen virtuaalinen työ:

$$W_{\text{ext}} = P \cdot 1$$

Virtuaalisen työn periaate:

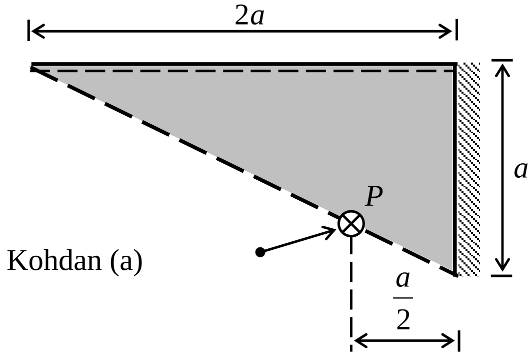
$$W_{\text{ext}} = -W_{\text{int}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{P_p = m[\frac{b}{d_1} + (1+\gamma)\frac{a}{d_2} + \frac{b}{d_3}].}}$$

[1] Luentomonisteessa 2005 on lisää hyviä esimerkkejä tästä aihepiiristä.

Tehtävä 6.2:

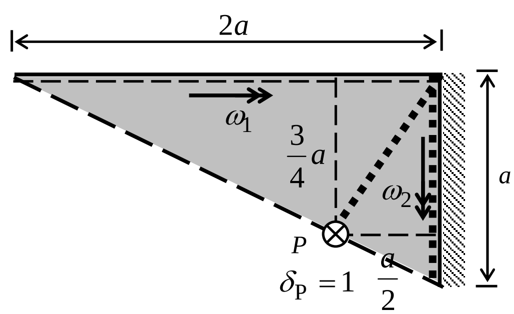
Tarkastellaan oheista suorakulmaisen kolmion muotoista laattaa, jonka toisiaan vastaan kohtisuorista reunoista toinen on vapaasti tuettu ja toinen jäykästi kiinnitetty ja jonka vino reuna on vapaa. Laatan täysplastinen momentti on *m*. (a) Laatan vapaalla reunalla etäisyydellä $a/2$ jäykästi kiinnitetystä reunasta vaikuttaa pistekuorma *P*. Määritä laatan rajakuorma P_p.

(b) Laatalla vaikuttaa tasainen kuorma q. Määritä laatan rajakuorma q_p. *Ohje:* Ratkaisuksi (b) kohdassa riittää kokeilemalla saatu rajakuorman likiarvo.



Ratkaisu:

(a)



Laatan osien kiertymät:

$$\omega_1 = \frac{1}{3a/4} = \frac{4}{3a}, \quad \omega_2 = \frac{1}{a/2} = \frac{2}{a}.$$

Sisäinen virtuaalinen työ:

$$-W_{\text{int}} = m\frac{a}{2}\omega_1 + m(a + \frac{3}{4}a)\omega_2 = m\frac{a}{2}\cdot\frac{4}{3a} + m\frac{7}{4}a\cdot\frac{2}{a} = (\frac{2}{3} + \frac{7}{2})m = \frac{25}{6}m.$$

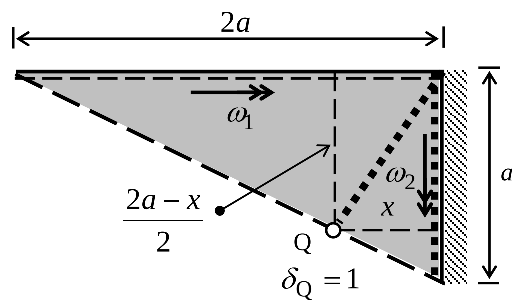
Ulkoinen virtuaalinen työ:

$$W_{\text{ext}} = P\delta_P = P\cdot 1 = P.$$

Virtuaalisen työn periaate:

$$W_{\text{ext}} = -W_{\text{int}} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{P_p = \frac{25}{6}m}}.$$

(b)



Laatan osien kiertymät:

$$\omega_1 = \frac{1}{(2a-x)/2} = \frac{2}{2a-x}, \quad \omega_2 = \frac{1}{x}.$$

Sisäinen virtuaalinen työ:

$$-W_{\text{int}} = mx\omega_1 + m(a + \frac{2a-x}{2})\omega_2 = mx \cdot \frac{2}{2a-x} + m\frac{4a-x}{2} \cdot \frac{1}{x} = (\frac{2x}{2a-x} + \frac{4a-x}{2x})m.$$

Ulkoinen virtuaalinen työ:

$$W_{\text{ext}} = qV_q = q \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a \cdot 2a \cdot 1 = \frac{1}{3} qa^2.$$

Virtuaalisen työn periaate:

$$W_{\text{ext}} = -W_{\text{int}} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{3}{a^2}(\frac{2x}{2a-x} + \frac{4a-x}{2x})m = 3(\frac{2x}{2a-x} + \frac{4a-x}{2x})\frac{m}{a^2}.$$

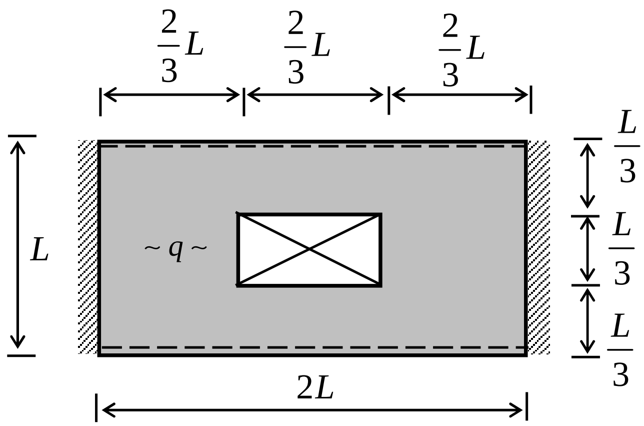
Kokeilu:

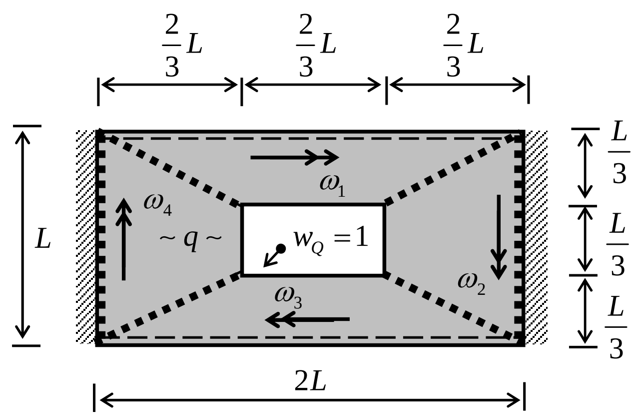
x/a	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
qa^2/m	12,5	11,1	10,3	10	10,1	10,5

Tulos: $\underline{\underline{q_p \approx 10,0 \frac{m}{a^2}}}$

Tehtävä 6.3:

Oheisen isotrooppisen suorakaidelaatan keskellä on aukko ja sen täysplastinen momentti on m. Määritä kuinka suuren tasaisen kuorman q laatta kestää.





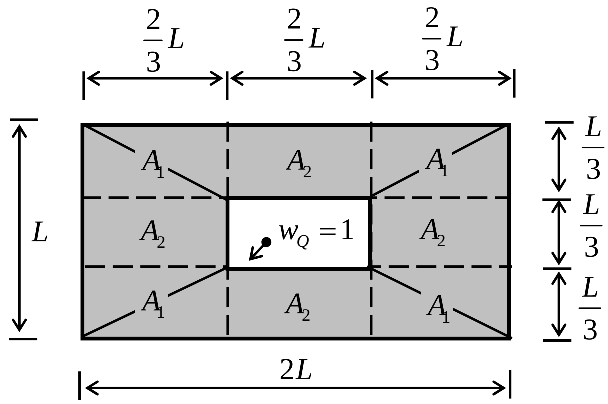
Laatan osien rotaatiot:

$$\omega_1 = \omega_3 = \frac{1}{L/3} = \frac{3}{L}, \quad \omega_2 = \omega_4 = \frac{1}{2L/3} = \frac{3}{2L}$$

Sisäinen virtuaalinen työ:

$$-W_{\text{int}} = m \cdot \frac{4}{3}L \cdot \omega_1 + m \cdot (L + \frac{2}{3}L) \cdot \omega_2 + m \cdot \frac{4}{3}L \cdot \omega_3 + m \cdot (L + \frac{2}{3}L) \cdot \omega_4$$

$$= m[\frac{4}{3}L \cdot \frac{3}{L} + (L + \frac{2}{3}L) \cdot \frac{3}{2L} + \frac{4}{3}L \cdot \frac{3}{L} + (L + \frac{2}{3}L) \cdot \frac{3}{2L}] = m(4 + \frac{5}{2} + 4 + \frac{5}{2}) = \underline{13m}$$



Painumanotkon tilavuus:

$$V = 4V_1 + 4V_2 = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot A_1 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot A_2 \cdot 1 = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} L \cdot \frac{1}{3} L \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} L \cdot \frac{1}{3} L \cdot 1 = \frac{8}{27} L^2 + \frac{4}{9} L^2$$

$$= \frac{20}{27} L^2$$

Ulkonen virtuaalinen työ:

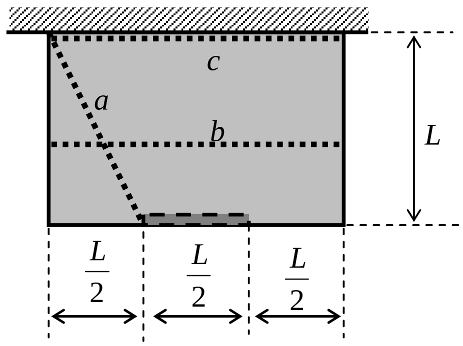
$$W_{\text{ext}} = qV = \underline{\frac{20}{27} qL^2}$$

Virtuaalisen työn periaate:

$$W_{\text{ext}} = -W_{\text{int}} \;\Rightarrow\; \frac{20}{27} qL^2 = 13m \;\Rightarrow\; q_p = \frac{351}{20} \frac{m}{L^2} = \underline{\underline{17,55 \frac{m}{L^2}}}$$

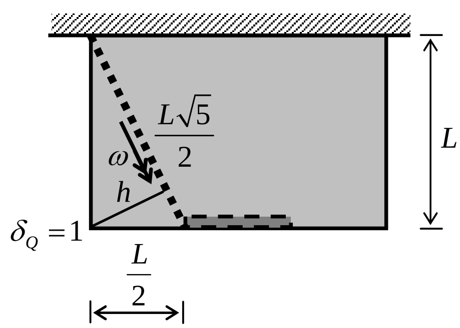
Tehtävä 6.4:

Määritä myötöviivateoriaa käyttäen oheisen yhdeltä sivultaan jäykästi kiinnitetyn ja muilta sivuiltaan vapaan, isotrooppisen suorakaidelaatan tasan jakautuneen kuorman *q* raja-arvo, kun laatta tukeutuu lisäksi vapaasti seinään kuvassa esitetyllä tavalla. Tukilinja seinään otaksutaan viivamaiseksi. Laatan täysplastinen momentti on *m*. Tutki erikseen vinoa myötöviivaa *a* sekä vaakasuoria myötöviivoja *b* ja *c* vastaavat mekanismit.



Ratkaisu:

(a) Myötöviiva *a*:



$$\frac{h}{L} = \frac{L/2}{L\sqrt{5}/2} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{L}{\sqrt{5}}$$

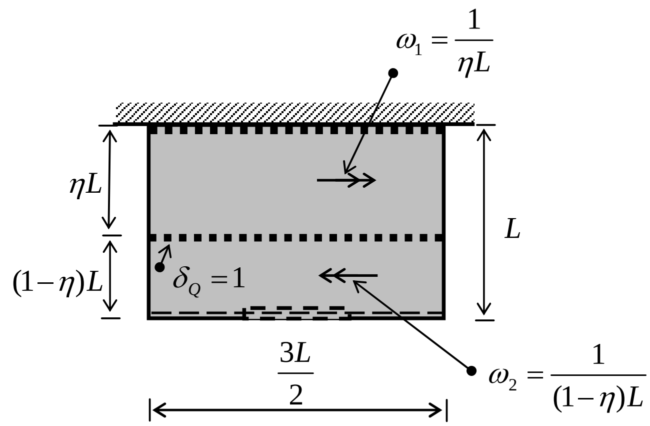
$$\omega = \frac{1}{h} = \frac{\sqrt{5}}{L}$$

$$-W_{\text{int}} = m \cdot \frac{L\sqrt{5}}{2} \cdot \omega = m \frac{L\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{L} = \frac{5}{2} m$$

$$W_{\text{ext}} = qV = q \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot L = \frac{qL^2}{12}$$

$$W_{\text{ext}} = -W_{\text{int}} \quad \Rightarrow \quad \frac{qL^2}{12} = \frac{5}{2} m \quad \Rightarrow \quad \underline{q^{(a)} = 30 \frac{m}{L^2}}$$

(b) Myötöviivat b ja c:



$$-W_{\text{int}} = 2\cdot m\cdot\frac{3L}{2}\cdot\omega_1 + m\frac{3L}{2}\cdot\omega_2 = m\frac{3L}{2}\cdot[\frac{2}{\eta L}+\frac{1}{(1-\eta)L}] = \frac{3(2-\eta)m}{2\eta(1-\eta)}$$

$$W_{\text{ext}} = qV = q\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3L}{2}\cdot L = \frac{3}{4}qL^2$$

$$W_{\text{ext}} = -W_{\text{int}} \;\Rightarrow\; \frac{3}{4}qL^2 = \frac{3(2-\eta)m}{2(\eta-\eta^2)} \;\Rightarrow\; q = \frac{4-2\eta}{\eta-\eta^2}\frac{m}{L^2}$$

q:n minimointi:

$$\frac{dq}{d\eta} = \frac{d}{d\eta}[\frac{4-2\eta}{\eta-\eta^2}\frac{m}{L^2}] = \frac{-2(\eta-\eta^2)-(1-2\eta)(4-2\eta)}{(\eta-\eta^2)^2}\frac{m}{L^2} = \frac{-4+8\eta-2\eta^2}{(\eta-\eta^2)^2}\frac{m}{L^2} = 0$$

$$\Rightarrow \eta^2 - 4\eta + 2 = 0 \Rightarrow \eta = 2\pm\sqrt{2^2-2} = 2\pm\sqrt{2} \;\Rightarrow\; \eta = 2-\sqrt{2} \approx 0,586$$

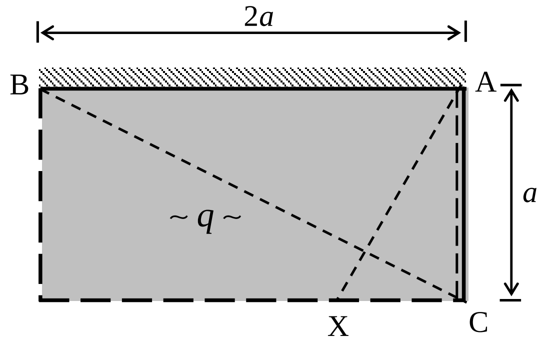
q:n minimoarvo:

$$q^{(b)} = \frac{4-2\cdot(2-\sqrt{2})}{2-\sqrt{2}-(2-\sqrt{2})^2}\frac{m}{L^2} = \underline{\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-4}\frac{m}{L^2} \approx 11,65\frac{m}{L^2}}$$

Nähdään siis, että $q = \min\{q^{(a)}, q^{(b)}\} = \underline{\underline{11,65\frac{m}{L^2}}}$

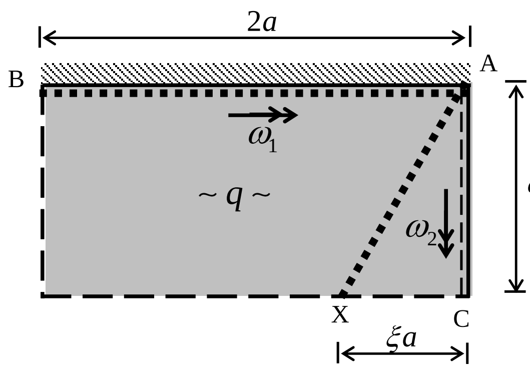
Tehtävä 6.5:

Oheisen suorakaidelaatan yksi reuna on jäykästi kiinnitetty, yksi reuna on vapaasti tuettu ja kaksi reunaa ovat vapaita. Laattaa kuormittaa tasainen kuorma q ja sen täysplastinen momentti on m. Määritä laatan rajakuorma q_p käyttäen (a) mekanismia, jonka yksi myötöviiva yhtyy janaan AX, ja (b) mekanismia, jonka myötöviiva yhtyy janaan BC. *Ohje:* Kohdan (a) ratkaisuksi riittää kokeilemalla saatu rajakuorman likiarvo.



Ratkaisu:

(a)



Laatan osien virtuaaliset rotaatiot:

$$\omega_1 = \frac{1}{a}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\xi a}$$

Ulkoinen virtuaalinen työ:

$$W_{\text{ext}} = q \cdot V_q = q \cdot [\frac{1}{3}\xi a \cdot a + \frac{1}{2}(2a - \xi a) \cdot a] = qa^2(1 - \frac{1}{6}\xi)$$

Sisäinen virtuaalinen työ:

$$-W_{\text{int}} = m \cdot (2a + \xi a) \cdot \omega_1 + m \cdot a \cdot \omega_2 = m(2a + \xi a)\frac{1}{a} + ma\frac{1}{\xi a} = (2 + \xi + \frac{1}{\xi})m$$

Virtuaalisen työn periaate:

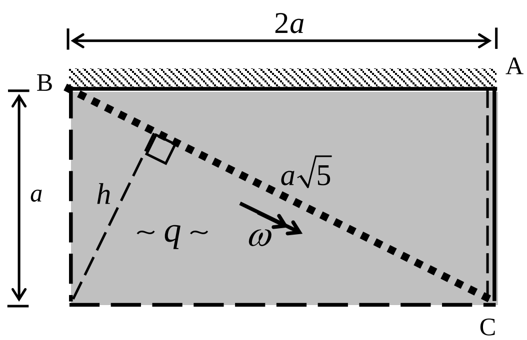
$$W_{\text{ext}} = -W_{\text{int}} \;\Rightarrow\; qa^2(1 - \frac{1}{6}\xi) = (2 + \xi + \frac{1}{\xi})m \;\Rightarrow\; q = \frac{2 + \xi + \frac{1}{\xi}}{1 - \frac{1}{6}\xi}\frac{m}{a^2}$$

Minimointi:

ξ	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,75
q	4,91	4,74	4,67	4,67	4,72	4,67

$$\Rightarrow \underline{q^{(a)} = 4,67\frac{m}{a^2}}$$

(b)



Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan:

$$\frac{h}{a} = \frac{2a}{a\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

Laatan osan virtuaalinen rotaatio:

$$\omega = \frac{1}{h} = \frac{\sqrt{5}}{2a}.$$

Ulkoinen virtuaalinen työ:

$$W_{\text{ext}} = q \cdot V_q = q \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a = \frac{1}{3}qa^2$$

Sisäinen virtuaalinen työ:

$$-W_{\text{int}} = m \cdot a\sqrt{5} \cdot \omega = m \cdot a\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2a} = \frac{5}{2}m$$

Virtuaalisen työn periaate:

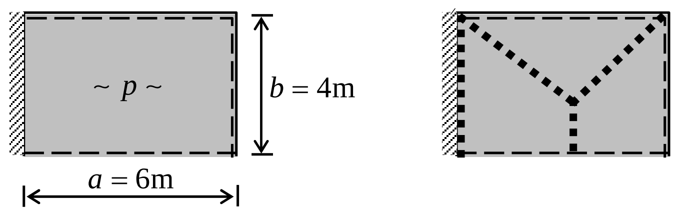
$$W_{\text{ext}} = -W_{\text{int}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}qa^2 = \frac{5}{2}m \quad \Rightarrow \quad \underline{q^{(b)} = 7,5\frac{m}{a^2}}$$

Rajakuorma:

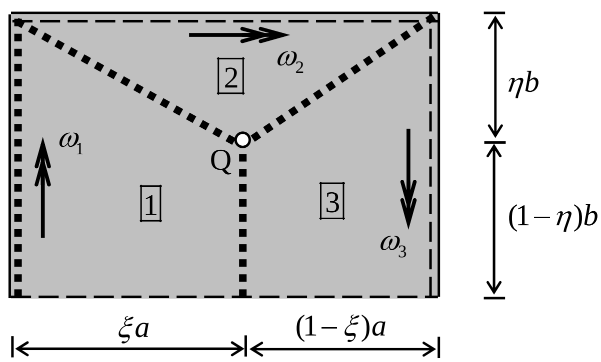
$$q_p = \min\{q^{(a)}, q^{(b)}\} = \underline{\underline{4,67\frac{m}{a^2}}}$$

Tehtävä 6.6:

Oheisen isotrooppisen suorakaidelaatan kaksi sivua on vapaasti tuettuja, yksi on jäykästi kiinnitetty ja yksi on vapaa. Laattaa kuormittaa tasainen kuorma p ja sen täysplastinen momentti on $m = 4$ kN. Määritä plastinen rajakuorma p_p käyttäen oheista myötö-kuviota. *Ohje:* Voit määrittää mekanismin muodon kuvaavat parametrit ja rajakuorman likimääräisesti kokeilemalla.



Ratkaisu:

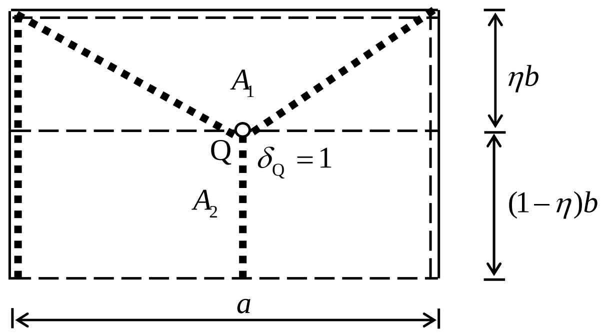


Laatan osien rotaatiot:

$$\omega_1 = \frac{1}{\xi a}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\eta b}, \quad \omega_3 = \frac{1}{(1-\xi)a}$$

Sisäisten voimien virtuaalinen työ:

$$W_{\text{int}} = -(2b\,m\omega_1 + a\,m\omega_2 + b\;m\,\omega_3) = -m[\frac{2b}{\xi\,a} + \frac{a}{\eta\,b} + \frac{b}{(1-\xi)\,a}] = -4[\frac{4}{3\xi} + \frac{3}{2\eta} + \frac{2}{3(1-\xi)}]\text{kN}$$



$$A_1 = a \cdot \eta b = \eta ab$$
$$A_2 = a \cdot (1-\eta) b = (1-\eta) ab$$

Ulkoinen virtuaalinen työ:

$$W_{\text{ext}} = (\frac{1}{3} A_1 \cdot 1 + \frac{1}{2} A_2 \cdot 1)\, p = [\frac{1}{3} \eta ab + \frac{1}{2}(1-\eta) ab]\, p = 4(3-\eta)\,\text{m}^2 \cdot p$$

Virtuaalisen työn yhtälö:

$$W_{\text{ext}} = -W_{\text{int}} \quad \Rightarrow \quad \underline{p = \frac{\dfrac{4}{3\xi} + \dfrac{3}{2\eta} + \dfrac{2}{3(1-\xi)}}{3-\eta} \dfrac{\text{kN}}{\text{m}^2}}$$

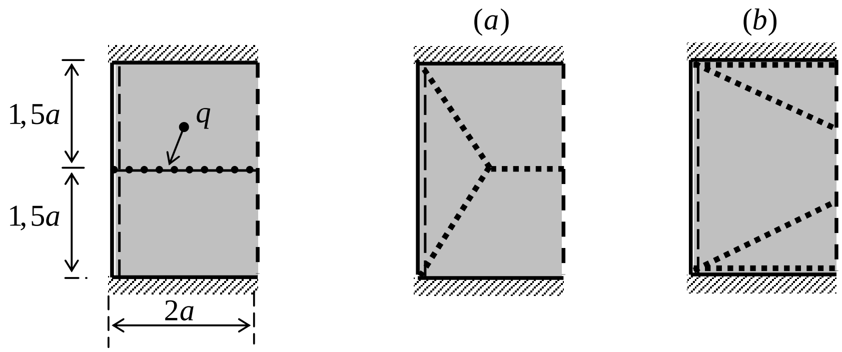
Etsitään minimi laskemalla p:n arvoja $[\text{kN/m}^2]$:

$\downarrow \eta \quad \xi \rightarrow$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,4	3,15	2,98	2,89	2,86	2,87	2,91
0,5	2,98	2,80	2,71	2,67	2,67	2,70
0,6	2,93	2,76	2,66	2,62	2,62	2,65
0,7	3,02	2,85	2,76	2,73	2,73	2,76

Päätellään taulukon perusteella: $\underline{\underline{p_p \approx 2,62 \dfrac{\text{kN}}{\text{m}^2}}}$.

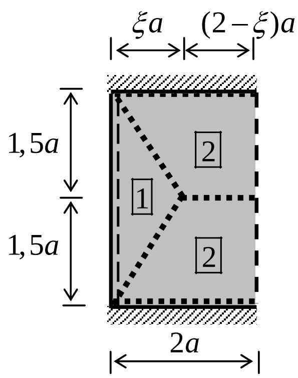
Tehtävä 6.7:

Oheisen isotrooppisen laatan ylä- ja alareuna ovat jäykästi kiinnitetyt, vasen reuna on vapaasti tuettu ja oikea reuna on vapaa. Laattaa kuormittaa sen symmetria-akselilla vaikuttava tasan jakautunut viivakuorma q. Kuinka suuren viivakuorman q laatta kestää, kun laatta on isotrooppinen ja sen täysplastinen momentti on m. Tutki mekanismit (a) ja (b). *Ohje:* Rajakuorman minimoinnin voi suorittaa kokeilemalla.



Ratkaisu:

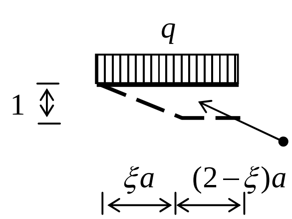
Mekanismi (a):



$$\omega_1 = \frac{1}{\xi a}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{1,5a} = \frac{2}{3a}$$

$$-W_{\text{int}} = 3a \cdot m \cdot \omega_1 + 2 \cdot 4a \cdot m \cdot \omega_2 = 3am \cdot \frac{1}{\xi a} + 8am \cdot \frac{2}{3a} = (\frac{3}{\xi} + \frac{16}{3})m$$



$$A_q = \frac{1}{2} \cdot \xi a \cdot 1 + (2-\xi)a = \frac{1}{2}(4-\xi)a$$

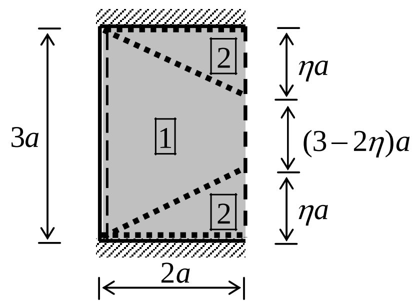
$$W_{\text{ext}} = qA_q = \frac{1}{2}(4-\xi)aq$$

$$W_{\text{ext}} = -W_{\text{int}} \quad \Rightarrow \quad \underline{q = \frac{2}{4-\xi}(\frac{3}{\xi} + \frac{16}{3})\frac{m}{a}}$$

ξ	qa/m
0	∞
0,5	6,476
1	5,555
1,5	5,867
2	6,833
0,9	5,591
1,1	5,559
1,05	5,552

$$\Rightarrow\ q_{\min}^{(a)} = 5,552\,\frac{m}{a}$$

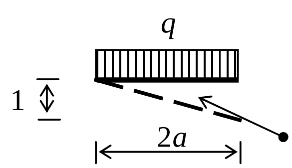
Mekanismi (b):



$$\omega_1 = \frac{1}{2a}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\eta a}$$

$$-W_{\text{int}} = 2\cdot\eta a\cdot m\cdot\omega_1 + 2\cdot 4a\cdot m\cdot\omega_2 = 2\eta am\cdot\frac{1}{2a} + 8am\cdot\frac{1}{\eta a} = (\eta+\frac{8}{\eta})m$$



$$A_q = \frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 1 = a$$

$$W_{\text{ext}} = qA_q = qa$$

$$W_{\text{ext}} = -W_{\text{int}}\ \Rightarrow\ \underline{q = (\eta+\frac{8}{\eta})\frac{m}{a}}$$

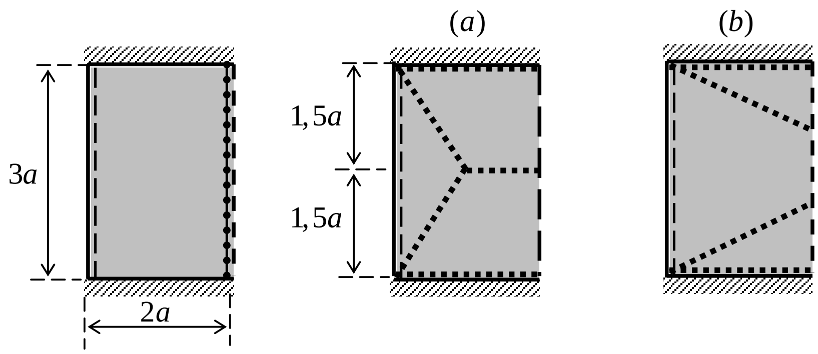
η	qa/m
0	∞
0,5	16,5
1	9
1,5	6,833

$$\Rightarrow\ q_{\min}^{(b)} = 6,833\,\frac{m}{a}$$

$$q_p = \min\{q_{\min}^{(a)}, q_{\min}^{(b)}\} = \underline{\underline{5,552\,\frac{m}{a}}}$$

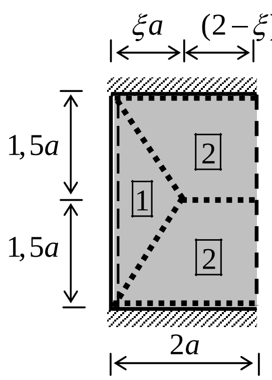
Tehtävä 6.8:

Oheisen isotrooppisen laatan ylä- ja alareuna ovat jäykästi kiinnitetyt, vasen reuna on vapaasti tuettu ja oikea reuna on vapaa. Laattaa kuormittaa vapaalla reunalla vaikuttava tasan jakautunut viivakuorma q. Kuinka suuren viivakuorman q laatta kestää, kun laatta on isotrooppinen ja sen täysplastinen momentti on m. Tutki mekanismit (a) ja (b).



Ratkaisu:

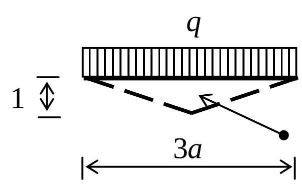
Mekanismi (a):



$$\omega_1 = \frac{1}{\xi a}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{1{,}5a} = \frac{2}{3a}$$

$$-W_{\text{int}} = 3a \cdot m \cdot \omega_1 + 2 \cdot 4a \cdot m \cdot \omega_2 = 3am \cdot \frac{1}{\xi a} + 8am \cdot \frac{2}{3a} = (\frac{3}{\xi} + \frac{16}{3})m$$



$$A_q = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 1 = \frac{3}{2}a$$

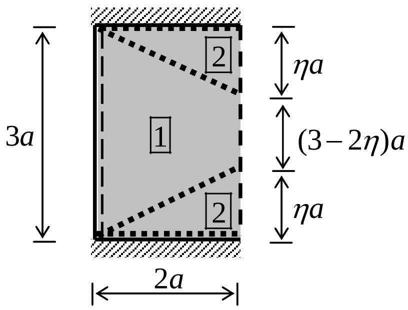
$$W_{\text{ext}} = qA_q = q \cdot \frac{3}{2}a = \frac{3}{2}qa$$

$$W_{\text{ext}} = -W_{\text{int}} \quad \Rightarrow \quad \underline{q = (\frac{2}{\xi} + \frac{32}{9})\frac{m}{a}}$$

ξ	qa/m
0	∞
0,5	7,556
1	5,555
1,5	4,889
2	4,555

$$\Rightarrow \; q_{\min}^{(a)} = 4,555\frac{m}{a}$$

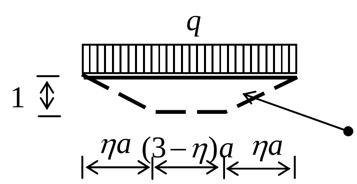
Mekanismi (b):



$$\omega_1 = \frac{1}{2a}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\eta a}$$

$$-W_{\text{int}} = 2\cdot\eta a\cdot m\cdot\omega_1 + 2\cdot 4a\cdot m\cdot\omega_2 = 2\eta am\cdot\frac{1}{2a} + 8am\cdot\frac{1}{\eta a} = (\eta + \frac{8}{\eta})m$$



$$A_q = (3-2\eta)a\cdot 1 + 2\cdot\frac{1}{2}\eta a\cdot 1 = (3-\eta)a$$

$$W_{\text{ext}} = qA_q = q\cdot(3-\eta)a = (3-\eta)qa$$

$$W_{\text{ext}} = -W_{\text{int}} \;\Rightarrow\; \underline{q = \frac{\eta^2+8}{\eta(3-\eta)}\frac{m}{a}}$$

η	qa/m
0	∞
0,5	6,6
1	4,5
1,5	4,555
1,1	4,406
1,2	4,370
1,3	4,385
1,15	4,381
1,25	4,371
1,21	4,369
1,22	4,369
1,23	4,370

$$\Rightarrow \; q_{\min}^{(b)} = 4,369\frac{m}{a}$$

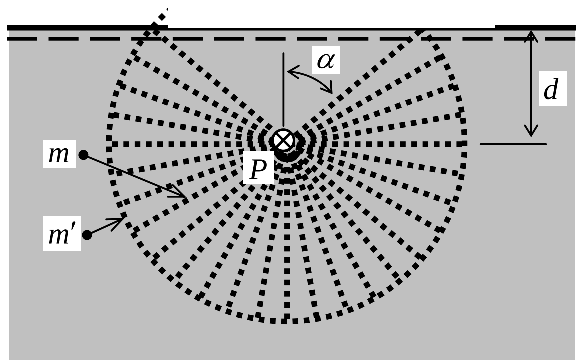
$$q_p = \min\{q_{\min}^{(a)}, q_{\min}^{(b)}\} = \underline{\underline{4,369\frac{m}{a}}}$$

Tehtävä 6.9:

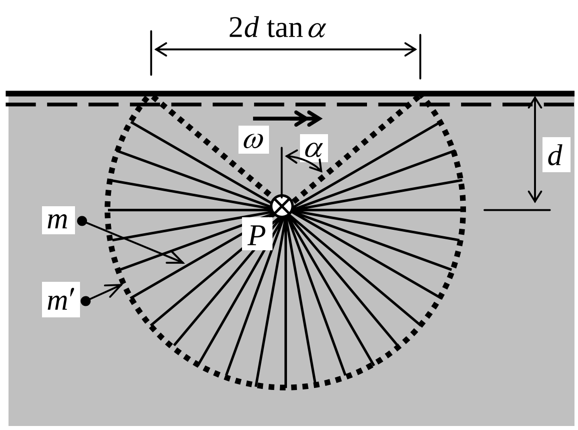
Laatan vapaasti tuetun reunan läheisyydessä, etäisyydellä *d* vaikuttaa pistekuorma *P*. Osoita, että suurin kuorman arvo, jonka laatta kestää on

$$P_p = 2(\pi - \arctan\sqrt{\frac{m'}{m}})(m+m') + 2\sqrt{mm'}\,,$$

missä m ja m' ovat positiivisiin ja negatiivisiin myötöviivoihin liittyvät täysplastisen momentin arvot. Käytä kuvan mukaista sortumismekanismia, joka muodostuu viuhkasta ja kolmiosta ja johon liittyy minimoimalla määräytyvä parametri α. *Ohje*: Tarvitset tangentin derivointikaavaa $d(\tan x)/dx = 1 + \tan^2 x$, joka on saattanut unohtua.



Ratkaisu:



$$\omega = \frac{1}{d}$$

Sisäinen virtuaalinen työ:

$$-W_{\text{int}} = (2\pi - 2\alpha)(m+m') + 2d\tan\alpha\cdot m\cdot \overbrace{\omega}^{1/d} = 2(\pi-\alpha)(m+m') + 2m\tan\alpha$$

Ulkoinen virtuaalinen työ:

$$W_{\text{ext}} = P\cdot 1$$

Virttuaalisen työn periaate:

$$W_{\text{ext}} = -W_{\text{int}} \Rightarrow$$

$$P = 2(\pi-\alpha)(m+m') + 2m\tan\alpha.$$

Minimoimalla α:n suhteen saadaan

$$\frac{dP}{d\alpha} = -2(m+m') + 2m(1+\tan^2\alpha) = 0$$

$\Rightarrow$

$$1+\tan^2\alpha = 1+\frac{m'}{m} \;\Rightarrow\; \tan\alpha = \sqrt{\frac{m'}{m}}.$$

Nyt saadaan

$$\underline{\underline{P = 2(\pi - \arctan\sqrt{\frac{m'}{m}})(m+m') + 2\sqrt{mm'}.}}$$