**Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2011**

**Kotitehtävä 7:**

Pinnan yhtälö on

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{a}.$$

Olkoon $\alpha = x$ ja $\beta = y$. (a) Konstruoi pinta (oikeakätiseen) $x, y, z-$koordinaatistoon, jonka $z-$akseli on alaspäin, piirtämällä seuraavat 6 koordinaattiviivaa $x = -a$, $x = 0$, $x = a$ ja $y = -a$ $y = 0$, $y = a$. (b) Laske mittakaavatekijät $A$, $B$ ja koordinaattiviivojen välinen kulma $\chi$, kaarevuudet $1/R_x$, $1/R_y$ ja kierevyys $1/R_{xy}$, keskikaarevuus $H$ ja Gaussin kaarevuusmitta $K$ sekä pääkaarevuudet $1/R_1$, $1/R_2$ ja vastaavat suunnat $\lambda_1$, $\lambda_2$ pisteissä O: $x = 0$, $y = 0$ ja P: $x = a$, $y = a$. (c) Mikä on kuoren tyyppi pisteissä O ja P.

*Osittainen vastaus:*
Pisteessä P:
$B = 2,236$, $\chi$=50,77°, $1/R_y = -0{,}1633a$,

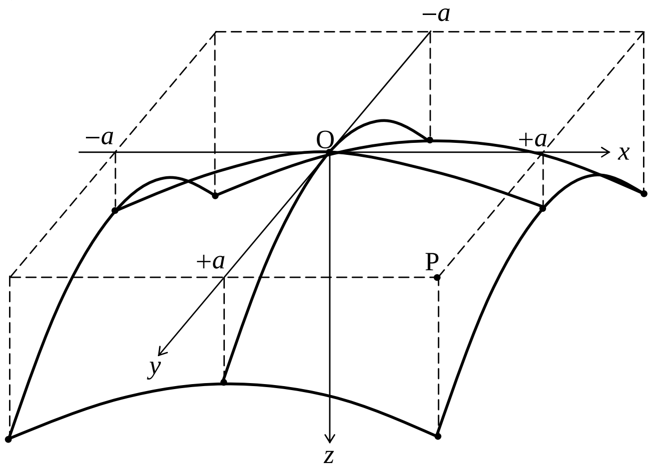
$K = 0{,}05556/a^2$, $1/R_2 = -0{,}5016/a$, $\chi_2 = -0{,}593$

**Palautus pe 4.11 klo 16.00 mennessä.**

**Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2011**

**Kotitehtävä 7 ratkaisu:**

(a)




(b)

Paikkavektori ja sen derivaatat:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (\frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{a})\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r},_x = \mathbf{i} + \frac{x}{a}\mathbf{k},\ \mathbf{r},_y = \mathbf{j} + 2\frac{y}{a}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r},_{xx} = \frac{1}{a}\mathbf{k},\ \mathbf{r},_{yy} = \frac{2}{a}\mathbf{k},\ \mathbf{r},_{xy} = \mathbf{0}.$$

Mittakaavatekijät ja koordinaattiviivojen välinen kulma:

$$\underline{A} = |\mathbf{r},_x| = \sqrt{1 + (\frac{x}{a})^2},\ \underline{B} = |\mathbf{r},_y| = \sqrt{1 + 4(\frac{y}{a})^2},$$

$$\underline{\cos\chi} = \frac{1}{AB}\mathbf{r},_x \bullet \mathbf{r},_y = \frac{1}{AB}(\mathbf{i} + \frac{x}{a}\mathbf{k}) \bullet (\mathbf{j} + 2\frac{y}{a}\mathbf{k}) = \underline{\frac{2}{AB}\frac{xy}{a^2}}$$

Kaarevuudet ja kierevyys:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{AB\sin\chi}\mathbf{r},_x \times \mathbf{r},_y = \frac{1}{AB\sin\chi}(\mathbf{i} + \frac{x}{a}\mathbf{k}) \times (\mathbf{j} + 2\frac{y}{a}\mathbf{k})$$

$$= \frac{1}{AB\sin\chi}(\overbrace{\mathbf{i} \times \mathbf{j}}^{\mathbf{k}} + 2\frac{y}{a}\overbrace{\mathbf{i} \times \mathbf{k}}^{-\mathbf{j}} + \frac{x}{a}\overbrace{\mathbf{k} \times \mathbf{j}}^{-\mathbf{i}} + 2\frac{xy}{a^2}\overbrace{\mathbf{k} \times \mathbf{k}}^{\mathbf{0}})$$

$$= \frac{1}{AB\sin\chi}(-\frac{x}{a}\mathbf{i} - 2\frac{y}{a}\mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

$$\underline{\frac{1}{R_x}} = -\frac{1}{A^2}\mathbf{n} \bullet \mathbf{r},_{xx} = -\frac{1}{A^2}\frac{1}{AB\sin\chi}(-\frac{x}{a}\mathbf{i} - 2\frac{y}{a}\mathbf{j} + \mathbf{k}) \bullet \frac{1}{a}\mathbf{k} = \underline{-\frac{1}{A^3 B\sin\chi}\frac{1}{a}},$$

$$\underline{\frac{1}{R_y}} = -\frac{1}{B^2}\mathbf{n} \bullet \mathbf{r},_{yy} = -\frac{1}{B^2}\frac{1}{AB\sin\chi}(-\frac{x}{a}\mathbf{i} - 2\frac{y}{a}\mathbf{j} + \mathbf{k}) \bullet \frac{2}{a}\mathbf{k} = \underline{-\frac{1}{AB^3\sin\chi}\frac{2}{a}},$$

$$\underline{\frac{1}{R_{xy}}} = \frac{1}{AB}\mathbf{n} \bullet \overbrace{\mathbf{r},_{xy}}^{\mathbf{0}} = \frac{1}{AB}\frac{1}{AB\sin\chi} = \underline{0}.$$

Keskikaarevuus ja Gaussin kaarevuusmitta:

$$H = \frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2\chi}(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} + 2\frac{\cos\chi}{R_{xy}})$$

$$K = \frac{1}{\sin^2\chi}(\frac{1}{R_x R_y} - \frac{1}{R_{xy}{}^2})$$

Pääkaarevuudet $1/R_1$, $1/R_2$ ja vastaavat suunnat $\lambda_1$, $\lambda_2$:

$$\frac{1}{R_1} = H + \sqrt{H^2 - K},\ \frac{1}{R_2} = H - \sqrt{H^2 - K}$$

$$\lambda_i = \frac{A}{B}\frac{\frac{1}{R_{xy}} + \frac{\cos\chi}{R_i}}{\frac{1}{R_y} - \frac{1}{R_i}} = \frac{A}{B}\frac{\cos\chi}{\frac{R_i}{R_y} - 1}$$

Laskelma:

| Piste | $x$ | $y$ | $A$ | $B$ | $\cos\chi$ | $\chi$ | $1/R_x$ | $1/R_y$ | $1/R_{xy}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| O | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 90° | $-\frac{1}{a}$ | $-\frac{2}{a}$ | 0 |
| P | $a$ | $a$ | $1,4142$ | $2,2361$ | $0,63246$ | $50,77°$ | $-\frac{0,2041}{a}$ | $-\frac{0,1633}{a}$ | 0 |

| Piste | $H$ | $K$ | $1/R_1$ | $1/R_2$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| O | $-\frac{3}{2a}$ | $\frac{2}{a^2}$ | $-\frac{1}{a}$ | $-\frac{2}{a}$ | 0 | $\infty$ |
| P | $-\frac{0,3062}{a}$ | $\frac{0,05556}{a^2}$ | $-\frac{0,1108}{a}$ | $-\frac{0,5016}{a}$ | $0,843$ | $-0,593$ |

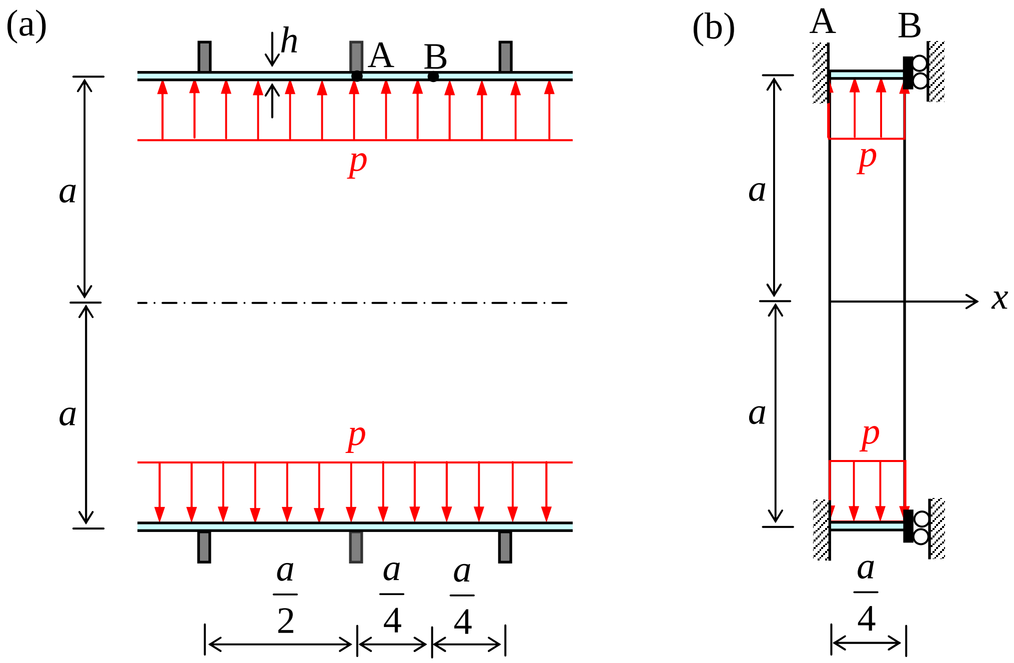
(c) Kuori on elliptinen.

**Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2011**

**Kotitehtävä 8:**

Ympyrälieriön muotoinen säiliö (kuva a), jota kuormittaa tasan jakautunut paine *p*, on jäykistetty tasavälein sijoitetuilla jäykistysrenkailla. Renkaiden jäykkyys on niin suuri, että lieriön taipuma voidaan niiden kohdalla otaksua nollaksi. Näin säiliön analysointi voidaan suorittaa käyttäen äärellisen sylinterikuoren teoriaa ja kuvan b mukaista laskentamallia. Kuoren kimmomoduuli on *E*, Poissonin vakio $\nu = 0{,}3$, säde on *a* ja paksuus $h = 0{,}05a$. Määritä kuoren taivutusmomentin $M_x$ arvot jäykistysrenkaan kohdalla (piste A) ja kahden renkaan keskivälillä (piste B). Määritä myös jäykistysrenkaan ja lieriön välisen kosketusvoiman (pituusyksikköä kohti) suuruus. Otaksutaan, että aksiaalinen normaalivoima $N_x = 0$.

*Vastaus:* $M_{x\mathrm{A}} = -14{,}25 \cdot 10^{-3}\, pa^2, M_{x\mathrm{B}} = 6{,}45 \cdot 10^{-3}\, pa^2,\ P_{\mathrm{kosk}} = 0{,}377\, pa.$




**Palautus pe 11.11 klo 16.00 mennessä.**

**Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2011**

**Kotitehtävän 8 ratkaisu:**

Vaimennusluku:

$$\beta=\sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{h^2a^2}}=\sqrt[4]{\frac{3(1-0,3^2)}{(0,05a)^2a^2}}=5,748515\frac{1}{a}\,,\ \ \beta L=1,437129<5$$

Y-funktioiden arvot $\overline{Y}_i=Y_i(\beta L)$:

$\overline{Y}_1=0,296275,\ \overline{Y}_2=1,233938,\ \overline{Y}_3=0,983889,\ \overline{Y}_4=0,484665$

Yksityisratkaisu:

$q_n^*=p$

$$w_0=\frac{a^2}{Eh}q_n^*=\frac{a^2}{E\cdot 0,05a}p=20\frac{pa}{E}.$$

Taipuma $w$, kiertymä $\varphi_x$, taivutusmomentti $M_x$ ja leikkausvoima $Q_x$ integrointivakioiden avulla:

$$w(x)=C_1Y_1(\beta x)+C_2Y_2(\beta x)+C_3Y_3(\beta x)+C_4Y_4(\beta x)+20\frac{pa}{E}$$

$$\varphi_x\equiv w'=\beta[-4C_1Y_4(\beta x)+C_2Y_1(\beta x)+C_3Y_2(\beta x)+C_4Y_3(\beta x)]$$

$$M_x\equiv -Dw''=D\beta^2[4C_1Y_3(\beta x)+4C_2Y_4(\beta x)-C_3Y_1(\beta x)-C_4Y_2(\beta x)]$$

$$Q_x\equiv M_x'=D\beta^3[4C_1Y_2(\beta x)+C_2 4Y_3(\beta x)+4C_3Y_4(\beta x)-C_4Y_1(\beta x)]$$

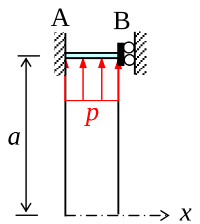
Reunaehdot:

$$w(0)\equiv C_1+20\frac{pa}{E}=0$$

$$\varphi_x(0)\equiv \beta C_2=0$$

$$\varphi_x(L)\equiv \beta(-4C_1\overline{Y}_4+C_2\overline{Y}_1+C_3\overline{Y}_2+C_4\overline{Y}_3)=0$$

$$Q_x(L)\equiv D\beta^3(4C_1\overline{Y}_2+4C_2\overline{Y}_3+4C_3\overline{Y}_4-C_4\overline{Y}_1)=0$$




Integrointivakioiden määritys:

$$\underline{C_1=-20\frac{pa}{E}},\ \underline{C_2=0}$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{Y}_2C_3+\overline{Y}_3C_4&=-80\overline{Y}_4\frac{pa}{E}\\ 4\overline{Y}_4C_3-\overline{Y}_1C_4&=80\overline{Y}_2C_1\frac{pa}{E}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}\overline{Y}_2 & \overline{Y}_3\\ 4\overline{Y}_4 & -\overline{Y}_1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}C_3\\ C_4\end{Bmatrix}=80\frac{pa}{E}\begin{Bmatrix}-\overline{Y}_4\\ \overline{Y}_2\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}C_3\\ C_4\end{Bmatrix}=80\frac{pa}{E}\frac{1}{-\overline{Y}_1\overline{Y}_2-4\overline{Y}_3\overline{Y}_4}\begin{bmatrix}-\overline{Y}_1 & -\overline{Y}_3\\ -4\overline{Y}_4 & \overline{Y}_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-\overline{Y}_4\\ \overline{Y}_2\end{Bmatrix}=80\frac{pa}{E}\frac{1}{\overline{Y}_1\overline{Y}_2+4\overline{Y}_3\overline{Y}_4}\begin{Bmatrix}-Y_1Y_4+Y_2Y_3\\ -4Y_4^2-Y_2^2\end{Bmatrix}$$

$$C_3=80\frac{-\overline{Y}_1\overline{Y}_4+\overline{Y}_2\overline{Y}_3}{\overline{Y}_1\overline{Y}_2+4\overline{Y}_3\overline{Y}_4}\frac{pa}{E}=37,6756\frac{pa}{E}$$

$$C_4=-80\frac{4\overline{Y}_4^2+\overline{Y}_2^2}{Y_1Y_2+4\overline{Y}_3\overline{Y}_4}\frac{pa}{E}=-86,6587\frac{pa}{E}$$

<u>Taivutusmomentit pisteissä A ja B:</u>

$$\underline{\underline{M_{x\mathrm{A}}}}=M_x(0)=-D\beta^2C_3=-\frac{E\cdot(0,05a)^3}{12(1-0,3^2)}(5,748515\frac{1}{a})^2\cdot 37,6756\frac{pa}{E}$$

$$=\underline{\underline{-0,01425\,pa^2}}$$

$$\underline{\underline{M_{x\mathrm{B}}}}=M_x(L)=D\beta^2(4C_1\overline{Y}_3+4C_2\overline{Y}_4-C_3\overline{Y}_1-C_4\overline{Y}_2)$$

$$=\frac{E\cdot(0,05a)^3}{12(1-0,3^2)}(5,748515\frac{1}{a})^2[4(-20)\overline{Y}_3-37,6756\overline{Y}_1+86,6587\overline{Y}_2]\frac{pa}{E}$$

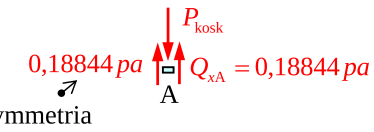
$$=\underline{\underline{0,005965\,pa^2}}$$

<u>Jäykistysrenkaan ja lieriön välinen kosketusvoima:</u>

Leikkausvoima pisteen A oikealla puolelle:

$$Q_{x\mathrm{A}}\equiv Q_x(0)=-D\beta^3C_4=-\frac{E\cdot(0,05a)^3}{12(1-0,3^2)}(5,748515\frac{1}{a})^3\cdot(-86,6587\frac{pa}{E})$$

$$=\underline{0,18844\,pa}$$

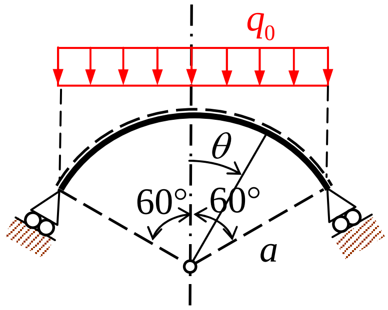



$$\uparrow\ 2\cdot 0,18844\,pa-P_{\mathrm{kosk}}=0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{P_{\mathrm{kosk}}=0,377pa}}$$

**Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2011**

**Kotitehtävä 9:**

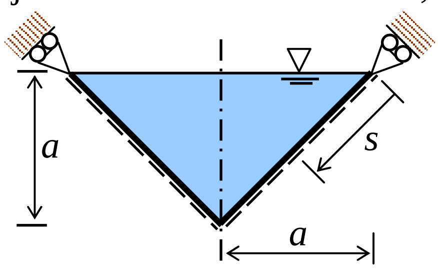
**Osa (a):** Oheista pallokalotin muotoista kuorta kuormittaa vaakatason pintayksikköä kohti tasan jakautunut lumikuorma $q_0$. Määritä kuoren kalvovoimat $N_\theta(\theta)$ ja $N_\phi(\theta)$ sekä piirrä niiden kuvaajat kulman $\theta$ funktiona. Määritä myös kalvotilan venymä $\varepsilon_\phi$ ja taipuma $w$ kuoren reunalla. Kuoren paksuus on $h = 0,05a$ ja Poissonin vakio on $\nu = 0$.




*Tuloksia kuoren reunalla:*

$$N_\theta(60°) = -\frac{q_0 a}{2},\ N_\phi(60°) = \frac{q_0 a}{4},\ \varepsilon_\phi(60°) = 5\frac{q_0}{E},\ w(60°) = 5\frac{q_0 a}{E}$$

**Osa (b):** Määritä oheisen ympyräkartion muotoisen nestesäiliön kalvovoimat $N_s(s)$ ja $N_\phi(s)$ sekä venymät $\varepsilon_s$, $\varepsilon_\phi$, derivaatta $d\varepsilon_\phi / ds$ ja taipuma $w$ kuoren reunalla. Nesteen tiheys on $\rho$, kuoren paksuus on $h = a/250$ ja Poissonin vakio on $\nu = 0,3$.




*Vastaus:*

$$N_s = \frac{\sqrt{3}}{6}\rho g\left(a - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)(a + s\sqrt{2}),\ N_\phi = \rho g s\left(a - \frac{s}{\sqrt{2}}\right),\ \varepsilon_s(0) = \frac{250\sqrt{2}}{6}\frac{\rho g a}{E},$$

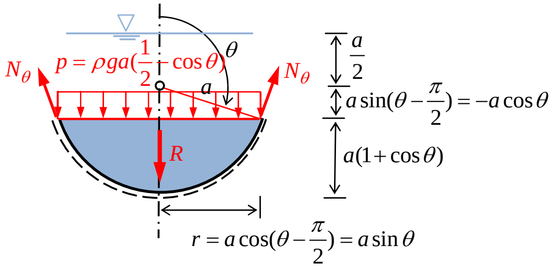
$$\varepsilon_\phi(0) = -\frac{25\sqrt{2}}{2}\frac{\rho g a}{E},\ \frac{d\varepsilon_\phi}{ds}(0) = \frac{475}{2}\frac{\rho g}{E},\ w(0) = -25\frac{\rho g a^2}{E}$$

**Palautus pe 18.11 klo 16.00 mennessä.**

**Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2011**

**Kotitehtävän 9 ratkaisu:**

**Osa (a):**




$$\downarrow\ -2\pi r N_\theta \sin\theta + R = 0 \ \Rightarrow -2\pi a \sin^2\theta N_\theta + R = 0 \ \Rightarrow\ N_\theta = \frac{R}{2\pi a \sin^2\theta}$$

$$R = \rho g V + pA = \rho g \cdot \frac{\pi}{3}[a(1+\cos\theta)]^2[3a - a(1+\cos\theta)] + \rho g a(\frac{1}{2} - \cos\theta)\cdot \pi r^2$$

$$= \rho g a^3 \cdot \pi[\frac{1}{3}(1+\cos\theta)^2(2-\cos\theta) + (\frac{1}{2} - \cos\theta)\sin^2\theta]$$

$$N_\theta = \frac{1}{2\pi a \sin^2\theta}\cdot \rho g a^3 \cdot \pi[\frac{1}{3}(1+\cos\theta)^2(2-\cos\theta) + (\frac{1}{2} - \cos\theta)\sin^2\theta]$$

$$= \rho g a^2[\frac{1}{6(1-\cos^2\theta)}(1+\cos\theta)^2(2-\cos\theta) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \cos\theta)]$$

$$= \underline{\underline{\rho g a^2[\frac{(1+\cos\theta)(2-\cos\theta)}{6(1-\cos\theta)} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \cos\theta)]}}$$

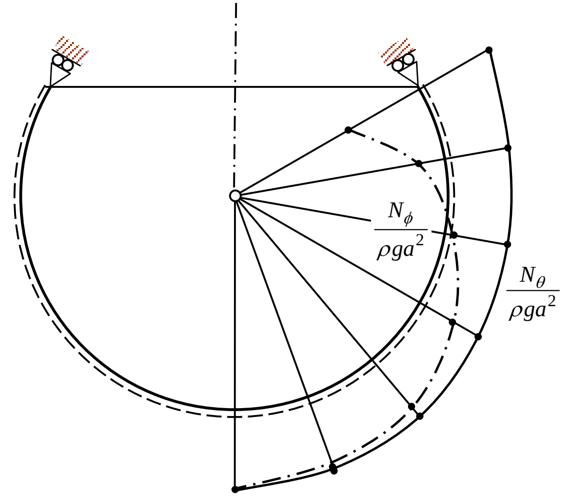
$$N_\phi = -\frac{R_\phi}{R_\theta} N_\theta + q_n R_\phi = -N_\theta + pa$$

$$= -\rho g a^2[\frac{(1+\cos\theta)(2-\cos\theta)}{6(1-\cos\theta)} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \cos\theta)] + \rho g a^2(\frac{1}{2} - \cos\theta)$$

$$= \underline{\underline{\rho g a^2[-\frac{(1+\cos\theta)(2-\cos\theta)}{6(1-\cos\theta)} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \cos\theta)]}}$$

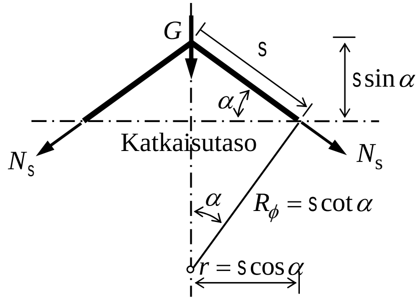


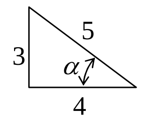
| $\theta$ | $\frac{N_\theta}{\rho g a^2}$ | $\frac{N_\phi}{\rho g a^2}$ |
|---|---|---|
| 60 | $\frac{3}{4} = 0,75$ | $-\frac{3}{4} = -0,75$ |
| 80 | 0,595 | $-0,269$ |
| 100 | 0,592 | 0,082 |
| 120 | $\frac{23}{36} \approx 0,639$ | $\frac{13}{36} \approx 0,361$ |
| 140 | 0,694 | 0,572 |
| 160 | 0,735 | 0,705 |
| 180 | $\frac{3}{4} = 0,75$ | $\frac{3}{4} = 0,75$ |




**Osa (b):**

(i)




$\sin\alpha = 3/5$

$\cos\alpha = 4/5$

$\tan\alpha = 3/4$

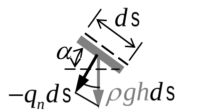
$$G = \rho g h A = \rho g \cdot \frac{a}{40}\cdot \pi r s = \frac{\pi}{40}\rho g a r s$$

$$\downarrow\ N_s \sin\alpha \cdot 2\pi r + G = 0$$

$$\Rightarrow\ N_s = -\frac{G}{2\pi r \sin\alpha} = -\frac{1}{2\pi r\sin\alpha}\cdot\frac{\pi}{40}\rho g a r s = \underline{\underline{-\frac{\rho g a}{48}}}\, s$$

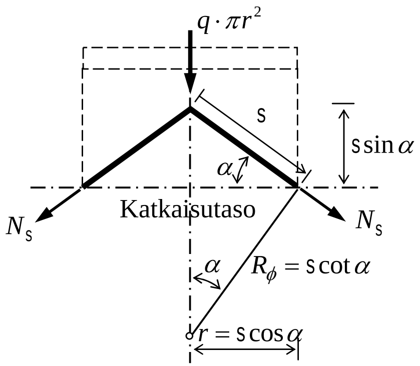
$$q_n = -\rho g h \cos\alpha = -\rho g \frac{a}{40}\frac{4}{5} = -\frac{\rho g a}{50}$$

$$N_\phi = q_n R_\phi = -\frac{\rho g a}{50}\cdot s\overbrace{\cot\alpha}^{4/3} = \underline{\underline{-\frac{2}{75}\rho g a s}}$$




$$-q_n ds = \rho g h \cos\alpha\, ds$$

(ii)

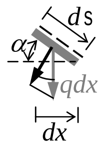



$$\downarrow\ N_s \sin\alpha \cdot 2\pi r + q \cdot \pi r^2 = 0 \ \Rightarrow\ N_s = -\frac{qr}{2\sin\alpha} = -\frac{qs\cot\alpha}{2} = \underline{\underline{-\frac{2}{3}qs}}$$

$$q_n = -q\cos^2\alpha = -\frac{16}{25}q$$

$$N_\phi = q_n R_\phi = \underline{\underline{-\frac{64}{75}qs}}$$

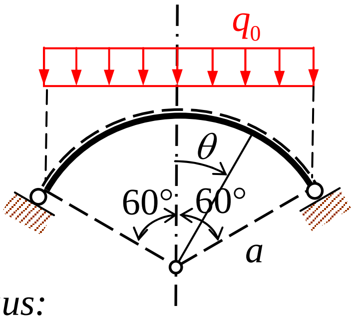
$$-q_n ds = q\,dx\cos\alpha$$
$$= q\,ds\cos^2\alpha$$



**Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2011**

**Kotitehtävä 10:**

**Osa (a):** Kotitehtävän 9 (a) pallokalotin muotoinen kuori tukeutuu nivelellisesti liikkumattomaan alustaan. Määritä leikkausvoima $Q_\theta$ tuella sekä piirrä taivutusmomentin $M_\theta(\theta)$ jakautuma tuen läheisyydessä. Arvioi piirroksen tarkkuudella maksimiarvo $M_{\theta,\max}$.

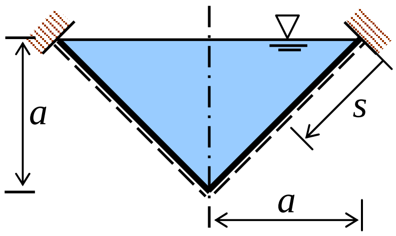



*Osittainen vastaus:*

$$Q_\theta(60°) = -0{,}02124 q_0 a,\ M_\theta(s) = 0{,}003608 q_0 a^2 e^{-5{,}886(\frac{\pi}{3}-\theta)} \sin[5{,}886(\frac{\pi}{3}-\theta)],$$

$$M_{\theta,\max} \approx 0{,}00116 q_0 a^2.$$

**Osa (b):** Kotitehtävän 9 (b) ympyräkartion muotoinen nestesäiliö on reunaltaan jäykästi kiinnitetty. Määritä taivutusmomentin $M_s$, leikkausvoiman $Q_s$ ja kalvovoiman $N_\phi$ arvot kuoren reunalla.




*Osittainen vastaus:*

$$M_s(0) = 2{,}961 \cdot 10^{-6} \rho g a^3,\ Q_s(0) = -1{,}513 \cdot 10^{-3} \rho g a^2,\ N_\phi(0) = 0{,}07071 \rho g a^2$$

**Palautus pe 25.11 klo 16.00 mennessä.**

**Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2011**

**Kotitehtävän 10 ratkaisu:**

**Osa (a):**

Kalvotilan taipuma reunalla 2 (vrt. Kotitehtävä 10 osa (a)):

$$w_2^K \equiv w^K(60°) = 5\frac{q_0 a}{E}$$

Vaimennusluku ja taivutusjäykkyys:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{h^2 R_\phi^2}} = \frac{5,88566}{a}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{1}{96000}Ea^3$$

Reunan leikkausvoiman määrittäminen:

$$w_2 \equiv \frac{1}{2D\beta^3}Q_2 - \frac{1}{2D\beta^2}\overbrace{M_2}^{0} + w_2^K = 0 \;\Rightarrow$$

$$Q_2 = -2D\beta^3 w_2^K = -2\cdot\frac{Ea^3}{96000}\cdot\frac{5,88566^3}{a^3}\cdot 5\frac{q_0 a}{E} = \underline{-0,021238 q_0 a}$$

Taivutusmomentti $M_\theta$:

$$M_\theta \equiv M_\theta^T = \frac{e^{-\beta s}}{\beta}[\beta\overbrace{M_2}^{0}\cos\beta s + (-Q_2 + \beta\overbrace{M_2}^{0})\sin\beta s] = -\frac{Q_2}{\beta}e^{-\beta s}\sin\beta s$$

$$= -\frac{-0,021238 q_0 a}{5,88566/a}e^{-\beta s}\sin\beta s = 0,003608 q_0 a^2 e^{-\beta s}\sin\beta s$$

Käyttäen yhteyttä

$$s = (\frac{\pi}{3}-\theta)a$$

saadaan tästä

$$M_\theta = 0,003608 q_0 a^2 e^{-5,886(\frac{\pi}{3}-\theta)}\sin[5,886(\frac{\pi}{3}-\theta)]$$

Lasketaan taivutusmomentin $M_\theta$ arvoja:

| $\theta$ | $M_\theta/(q_0 a^2)$ |
|---|---|
| $\pi/3$ | 0 |
| $11\pi/36$ | $1,061\cdot 10^{-3}$ |
| $5\pi/18$ | $1,105\cdot 10^{-3}$ |
| $9\pi/36$ | $7,724\cdot 10^{-4}$ |
| $4\pi/18$ | $4,093\cdot 10^{-4}$ |
| $3\pi/18$ | $9,873\cdot 10^{-6}$ |
| $2\pi/18$ | $-4,879\cdot 10^{-5}$ |
| $\pi/18$ | $-1,932\cdot 10^{-5}$ |
| 0 | $-9,042\cdot 10^{-7}$ |
| $21\pi/72$ | $1,163\cdot 10^{-3}$ |

Taivutusmomentin $M_\theta$ maksimiarvo:

$$\underline{\underline{M_{\theta,\max} \approx 0,00116 q_0 a^2}}$$

**Osa (b):**

Kalvotilan taipuma reunalla 1 (vrt. Kotitehtävä 10 osa (b)):

$$w_1^K \equiv w(0) = \underline{-25\frac{\rho g a^2}{E}}$$

Kalvotilan kiertymä reunalla 1:

$$\varphi_1^K \equiv \varphi_s^K(0) = \cot\theta[\varepsilon_\phi^K(0) - \varepsilon_s^K(0)] + R_\phi(0)\frac{d\varepsilon_\phi}{ds}(0)$$

$$= \overbrace{\cot 135°}^{-1}\cdot[-\frac{25\sqrt{2}}{2}\frac{\rho g a}{E} - \frac{250\sqrt{2}}{6}\frac{\rho g a}{E}] + a\sqrt{2}\cdot\frac{475}{2}\frac{\rho g}{E}$$

$$= \underline{\frac{1750\sqrt{2}}{6}\frac{\rho g a}{E}}$$

Vaimennusluku ja taivutusjäykkyys:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{h^2 R_\phi(0)^2}} = \sqrt[4]{\frac{3(1-0,3^2)}{(a/250)^2 \cdot (a\sqrt{2})^2}} = \frac{17,090}{a},$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{E \cdot (a/250)^3}{12(1-0,3^2)} = 5,8608 \cdot 10^{-9} Ea^3$$

Reunan leikkausvoiman ja taivutusmomentin määrittäminen:

$$\left.\begin{aligned} w_1 &\equiv -\frac{1}{2D\beta^3} Q_1 - \frac{1}{2D\beta^2} M_1 + w_1^K = 0 \\ \varphi_1 &\equiv \frac{1}{2D\beta^2} Q_1 + \frac{1}{D\beta} M_1 + \varphi_1^K = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 + \beta M_1 = 2D\beta^3 w_1^K \\ Q_1 + 2\beta M_1 = -2D\beta^2 \varphi_1^K \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1 + \frac{17,090}{a} M_1 = 2 \cdot 5,8608 \cdot 10^{-9} Ea^3 (\frac{17,090}{a})^3 (-25 \frac{\rho g a^2}{E}) \\ Q_1 + 2\frac{17,090}{a} M_1 = -2 \cdot 5,8608 \cdot 10^{-9} Ea^3 (\frac{17,090}{a})^2 \frac{1750\sqrt{2}}{6} \frac{\rho g a}{E} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1 + 17,090 \frac{M_1}{a} = -1,4627 \cdot 10^{-3} \rho g a^2 \\ Q_1 + 34,180 \frac{M_1}{a} = -1,4121 \cdot 10^{-3} \rho g a^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1 = -1,5133 \cdot 10^{-3} \rho g a^2 \\ \frac{M_1}{a} = 2,9608 \cdot 10^{-6} \rho g a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(0) \equiv Q_1 = \underline{\underline{-1,5133 \cdot 10^{-3} \rho g a^2}} \\ M_s(0) \equiv M_1 = \underline{\underline{2,9608 \cdot 10^{-6} \rho g a^3}} \end{cases}$$

Kalvovoiman $N_\phi(s)$ lauseke:

$$N_\phi(s) = N_\phi^T(s) + N_\phi^K(s) = 2R_\phi \beta e^{-\beta s}[(-Q_1 - \beta M_1)\cos\beta s + \beta M_1 \sin\beta s] + \rho g s (a - \frac{s}{\sqrt{2}})$$

Kalvovoima $N_\phi$ reunalla:

$$\begin{aligned} N_\phi(0) &= 2R_\phi(0)\beta(-Q_1 - \beta M_1) \\ &= 2a\sqrt{2} \cdot \frac{17,090}{a} \cdot (1,5133 \cdot 10^{-3} \rho g a^2 - \frac{17,090}{a} \cdot 2,9608 \cdot 10^{-6} \rho g a^3) \\ &= \underline{\underline{0,07071 \rho g a^2}} \end{aligned}$$