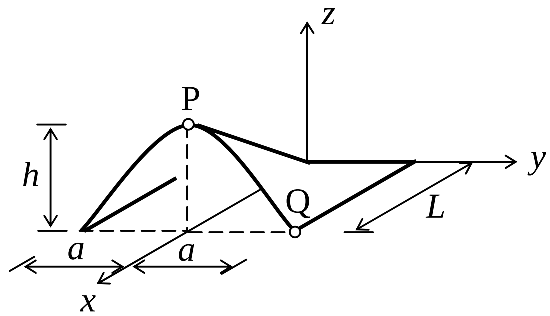
Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2009

Kotitehtävä 7:



Kuvan mukaisen pinnan yhtälö on

$$z = \frac{h}{a^2 L} x(a^2 - y^2).$$

Olkoon $\alpha = x/L$ ja $\beta = y/a$ sekä $a = L/2$ ja $h = L/4$. (a) Määritä lausekkeet mittakaavatekijöille A ja B, koordinaattiviivojen väliselle kulmalle χ, kaarevuuksille $1/R_\alpha$ ja $1/R_\beta$ sekä kierevyydelle $1/R_{\alpha\beta}$ funktiona käyräviivaisista koordinaateista α ja β. (b) Määritä myös pääkaarevuussäteet pisteissä P: $(L,0,h)$ ja Q: $(L,a,0)$. Mikä on pinnan tyyppi näissä pisteissä?

Osittainen vastaus:

(a) $\dfrac{1}{R_\beta} = \dfrac{8\alpha}{(1+\alpha^2\beta^2)\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 16\alpha^2\beta^2 + 16}}\dfrac{1}{L}$

(b) $\mathrm{P}:\ R_1 = \dfrac{\sqrt{17}}{8}L,\ R_2 = \infty,\ \mathrm{Q}:\ R_1 = \dfrac{2\sqrt{2}L}{1+\sqrt{3}},\ R_2 = \dfrac{2\sqrt{2}L}{1-\sqrt{3}}$

Palautus pe 6.11 klo 16.00 mennessä.

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2009

Kotitehtävän 7 ratkaisu:

Koordinaatit käyräviivaisten koordinaattien avulla:

$$x = \alpha L$$
$$y = \beta a = \frac{\beta L}{2}$$
$$z = \frac{L/4}{a^2 L}\alpha L[a^2 - (\beta a)^2] = \frac{\alpha L}{4}(1-\beta^2)$$

Kuoren pinnan paikkavektori:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \alpha L\mathbf{i} + \frac{\beta L}{2}\mathbf{j} + \frac{\alpha L}{4}(1-\beta^2)\mathbf{k}$$

Sen derivaattoja:

$$\mathbf{r},_{\alpha} = \frac{L}{4}[4\mathbf{i} + (1-\beta^2)\mathbf{k}],\ \mathbf{r},_{\beta} = \frac{L}{2}(\mathbf{j} - \alpha\beta\mathbf{k})$$

$$\mathbf{r},_{\alpha\alpha} = \mathbf{0},\ \mathbf{r},_{\alpha\beta} = -\frac{\beta L}{2}\mathbf{k},\ \mathbf{r},_{\beta\alpha} = -\frac{\beta L}{2}\mathbf{k},\ \text{(OK)},\ \mathbf{r},_{\beta\beta} = -\frac{\alpha L}{2}\mathbf{k}$$

Mittakaavatekijät ja koordinaattiviivojen välinen kulma:

$$A = |\mathbf{r},_{\alpha}| = \underline{\underline{\frac{L}{4}\sqrt{16 + (1-\beta^2)^2}}},\ B = |\mathbf{r},_{\beta}| = \underline{\underline{\frac{L}{2}\sqrt{1+\alpha^2\beta^2}}}$$

$$\cos\chi = \frac{1}{AB}\mathbf{r},_{\alpha}\bullet\mathbf{r},_{\beta} = \frac{1}{\frac{L}{4}\sqrt{16+(1-\beta^2)^2}\,\frac{L}{2}\sqrt{1+\alpha^2\beta^2}}\frac{L}{4}[4\mathbf{i} + (1-\beta^2)\mathbf{k}]\bullet\frac{L}{2}(\mathbf{j} - \alpha\beta\mathbf{k})$$

$$= -\frac{\alpha\beta(1-\beta^2)}{\sqrt{16+(1-\beta^2)^2}\sqrt{1+\alpha^2\beta^2}} \Rightarrow \underline{\underline{\chi = \arccos[-\frac{\alpha\beta(1-\beta^2)}{\sqrt{16+(1-\beta^2)^2}\sqrt{1+\alpha^2\beta^2}}]}}$$

Pinnan yksikkönormaalivektori:

$$\mathbf{r},_{\alpha} \times \mathbf{r},_{\beta} = \frac{L}{4}[4\mathbf{i} + (1-\beta^2)\mathbf{k}] \times \frac{L}{2}(\mathbf{j} - \alpha\beta\mathbf{k})$$

$$= \frac{L^2}{8}[4\overbrace{\mathbf{i}\times\mathbf{j}}^{\mathbf{k}} - 4\alpha\beta\overbrace{\mathbf{i}\times\mathbf{k}}^{-\mathbf{j}} + (1-\beta^2)\overbrace{\mathbf{k}\times\mathbf{j}}^{-\mathbf{i}} - (1-\beta^2)\alpha\beta\overbrace{\mathbf{k}\times\mathbf{k}}^{0}]$$

$$= \frac{L^2}{8}[-(1-\beta^2)\mathbf{i} + 4\alpha\beta\mathbf{j} + 4\mathbf{k}]$$

$$|\mathbf{r},_{\alpha} \times \mathbf{r},_{\beta}| = \frac{L^2}{8}\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 16\alpha^2\beta^2 + 16}$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r},_{\alpha} \times \mathbf{r},_{\beta}}{|\mathbf{r},_{\alpha} \times \mathbf{r},_{\beta}|} = \frac{-(1-\beta^2)\mathbf{i} + 4\alpha\beta\mathbf{j} + 4\mathbf{k}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 16\alpha^2\beta^2 + 16}}$$

Kaarevuudet:

$$\frac{1}{R_\alpha} = -\frac{1}{A^2}\mathbf{n}\bullet\mathbf{r},_{\alpha\alpha} = 0$$

$$\frac{1}{R_\beta} = -\frac{1}{B^2}\mathbf{n}\bullet\mathbf{r},_{\beta\beta} = -\frac{1}{B^2}\frac{-(1-\beta^2)\mathbf{i} + 4\alpha\beta\mathbf{j} + 4\mathbf{k}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 16\alpha^2\beta^2 + 16}}\bullet\frac{-\alpha L}{2}\mathbf{k}$$

$$= \frac{1}{B^2}\frac{2\alpha L}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 16\alpha^2\beta^2 + 16}} = \underline{\underline{\frac{8\alpha}{(1+\alpha^2\beta^2)\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 16\alpha^2\beta^2 + 16}}\frac{1}{L}}}$$

$$\frac{1}{R_{\alpha\beta}} = \frac{1}{AB}\mathbf{n}\bullet\mathbf{r},_{\alpha\beta} = \frac{1}{AB}\frac{-(1-\beta^2)\mathbf{i} + 4\alpha\beta\mathbf{j} + 4\mathbf{k}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 16\alpha^2\beta^2 + 16}}\bullet\frac{-\beta L}{2}\mathbf{k}$$

$$= \frac{1}{AB}\frac{-2\beta L}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 16\alpha^2\beta^2 + 16}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{-16\beta}{\sqrt{1+\alpha^2\beta^2}\sqrt{16+(1-\beta^2)^2}\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 16\alpha^2\beta^2 + 16}}\frac{1}{L}}}$$

Lasketaan arvot pisteissä P ja Q:

Piste	x	y	α	β	A	B	$\cos\chi$	χ	$1/R_\alpha$	$1/R_\beta$	$1/R_{\alpha\beta}$
P	L	0	1	0	$\frac{\sqrt{17}}{4}L$	$\frac{L}{2}$	0	90°	0	$\frac{8}{\sqrt{17}L}$	0
Q	L	a	1	1	L	$\frac{L}{\sqrt{2}}$	0	90°	0	$\frac{1}{\sqrt{2}L}$	$-\frac{1}{2L}$

Keskikaarevuus ja Gaussin kaarevuus sekä pääkaarevuudet pisteissä P ja Q:

$$H = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\cos^2\chi}(\overbrace{\frac{1}{R_\alpha}}^{0} + \frac{1}{R_\beta} + \frac{2\cos\chi}{R_{\alpha\beta}}) = \frac{1}{1-\cos^2\chi}(\frac{1}{2R_\beta} + \frac{\cos\chi}{R_{\alpha\beta}})$$

$$K = \frac{1}{1-\cos^2\chi}(\overbrace{\frac{1}{R_\alpha R_\beta}}^{0} - \frac{1}{R_{\alpha\beta}^2}) = -\frac{1}{R_{\alpha\beta}^2(1-\cos^2\chi)}$$

$$\frac{1}{R_{1,2}} = H \pm \sqrt{H^2 - K}$$

Piste	H	K	$1/R_1$	$1/R_2$
P	$\frac{4}{\sqrt{17}L}$	0	$\frac{8}{\sqrt{17}L}$	0
Q	$\frac{1}{2\sqrt{2}L}$	$-\frac{1}{4L^2}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}L}$	$\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}L}$

Kuoren tyyppi:

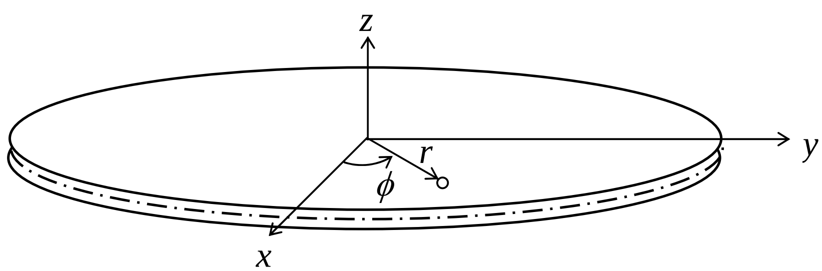
Pisteessä P $K = 0$, joten kuori on parabolinen.
Pisteessä Q $K < 0$, joten kuori on parabolinen.

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2009

Kotitehtävä 8:

Tarkastellaan homogeenista tasajäykkää (C, D ja ν vakiot) ympyrälevyä napakoordinaatistossa r,ϕ. Levyä kuormittaa jakautunut kuorma, jonka komponentit ovat $q_r(r,\phi)$ $q_r(r,\phi)$ ja $q_n(r,\phi)$. Levy ymmärretään tässä kuoren erikoistapaukseksi, jonka keskipinnan parametrimuotoiset yhtälöt ovat

$$x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi,\ z = 0.$$



Olkoon $\alpha = r$ ja $\beta = \phi$. Johda lähtien kuoren yleisistä yhtälöitä levyn

(a) kiertymien ja siirtymien yhteydet,
(b) keskipinnan venymien ja liukuman sekä siirtymien yhteydet,
(c) käyristymien ja vääntymän sekä siirtymien yhteydet,
(d) tasapainoyhtälöt.

Tarkastellaan ympyrälevyä, jota kuormittaa $z-$akselin suhteen symmetrinen jakautunut kuorma, joka riippuu näin pelkästään koordinaatista r ja jonka $\phi-$viivan suuntainen komponentti häviää, ts. $q_r = q_r(r)$, $q_\phi = 0$ ja $q_n = q_n(r)$. Tästä kuormituksesta aiheutuvat levyn siirtymille pätee vastaavasti: $u = u(r)$, $v = 0$ $w = w(r)$.

(e) Tutki kuinka levyn kiertymien, keskipinnan venymien ja liukuman sekä käyristymien ja vääntymän riippuvuudet siirtymistä tässä tapauksessa yksinkertaistuvat.
(f) Määritä kuoren jännitysresultanttien Q_r, N_r, N_ϕ M_r ja M_ϕ sekä siirtymien u ja w yhteydet.
(g) Tutki millaiset kolme differentiaaliyhtälöä saat levyn jännitys-resultanttien tasapainoyhtälöiksi.
(h) Eliminoimalla näistä yhtälöitä leikkausvoima Q_r muodosta differentiaaliyhtälöpari joissa on tuntemattomina jännitysresultantit N_r, N_ϕ M_r ja M_ϕ.

(i) Sijoita näihin yhtälöihin jännitysresultantit siirtymien u ja w avulla lausuttuina, jolloin saat differentiaaliyhtälöparin näille siirtymille.
(j) Mitä ratkaisemista helpottavaa on tässä yhtälöparissa?

Osittainen vastaus:

(b)

$$\varepsilon_r = u,_r \, , \; \varepsilon_\phi = \frac{v,_\phi}{r} + \frac{u}{r}, \; \gamma_{r\phi} = v,_r + \frac{u,_\phi}{r} - \frac{v}{r}$$

(f)

$$N_r = C(u,_r + \nu \frac{u}{r}), \; N_\phi = C(\frac{u}{r} + \nu u,_r), \; N_{r\phi} = 0$$

$$M_r = -D(w,_{rr} + \nu \frac{w,_r}{r}), \; M_\phi = -D(\frac{w,_r}{r} + \nu w,_{rr}), \; M_{r\phi} = 0$$

(h)

$$N_r,_r + \frac{N_r - N_\phi}{r} + q_r = 0, \; M_r,_{rr} + \frac{2M_r,_r}{r} - \frac{M_\phi,_r}{r} + q_n = 0$$

(i)

$$u,_{rr} + \frac{u,_r}{r} - \frac{u}{r^2} + \frac{q_r}{C} = 0, \; w,_{rrrr} + \frac{2w,_{rrr}}{r} - \frac{w,_{rr}}{r^2} + \frac{w,_r}{r^3} = \frac{q_n}{D}$$

Palautus pe 13.11 klo 16.00 mennessä.

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2009

Kotitehtävän 8 ratkaisu:

Keskipinnan paikkavektori ja sen derivaatat:

$$\mathbf{r} = r\cos\phi\,\mathbf{e}_r + r\sin\phi\,\mathbf{e}_\phi$$

ja

$$\mathbf{r},_r = \cos\phi\,\mathbf{e}_r + \sin\phi\,\mathbf{e}_\phi,\ \mathbf{r},_\phi = -r\sin\phi\,\mathbf{e}_r + r\cos\phi\,\mathbf{e}_\phi.$$

Mittakaavatekijät:

$$A = |\mathbf{r},_r| = \sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi} = \underline{1},\ B = |\mathbf{r},_\phi| = \sqrt{(-r\sin\phi)^2 + (r\cos\phi)^2} = \underline{r}$$

Kantavektorit:

$$\mathbf{e}_r = \frac{1}{A}\mathbf{r},_r = \cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\phi\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{e}_\phi = \frac{1}{B}\mathbf{r},_\phi = \frac{1}{r}(-r\sin\phi\,\mathbf{i} + r\cos\phi\,\mathbf{j}) = -\sin\phi\,\mathbf{i} + \cos\phi\,\mathbf{j}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\phi &= (\cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\phi\,\mathbf{j}) \times (-\sin\phi\,\mathbf{i} + \cos\phi\,\mathbf{j}) \\ &= -\sin\phi\cos\phi\,\overbrace{\mathbf{i}\times\mathbf{i}}^{\mathbf{0}} + \cos^2\phi\,\overbrace{\mathbf{i}\times\mathbf{j}}^{\mathbf{k}} - \sin^2\phi\,\overbrace{\mathbf{j}\times\mathbf{i}}^{-\mathbf{k}} + \sin\phi\cos\phi\,\overbrace{\mathbf{j}\times\mathbf{j}}^{\mathbf{0}} \\ &= (\cos^2\phi + \sin^2\phi)\mathbf{k} = \mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\phi}{|\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\phi|} = \frac{\mathbf{k}}{1} = \mathbf{k}$$

Kaarevuudet ja kierevyys:

$$\frac{1}{R_r} = \frac{1}{A^2}\overbrace{\mathbf{n},_r}^{\mathbf{0}}\bullet\mathbf{r},_r = \underline{0},\ \ \frac{1}{R_\phi} = \frac{1}{B^2}\overbrace{\mathbf{n},_\phi}^{\mathbf{0}}\bullet\mathbf{r},_\phi = \underline{0},\ \ \frac{1}{R_{r\phi}} = -\frac{1}{AB}\overbrace{\mathbf{n},_r}^{\mathbf{0}}\bullet\mathbf{r},_\phi = \underline{0}$$

(a) kiertymien ja siirtymien yhteydet:

Kaavoista (1.92) seuraa

$$\underline{\underline{\varphi_r}} = \frac{w,_r}{A} - \frac{\overbrace{u}^{0}}{R_r} = \underline{\underline{w,_r}}, \quad \underline{\underline{\varphi_\phi}} = \frac{w,_\phi}{B} - \frac{\overbrace{v}^{0}}{R_\phi} = \underline{\underline{\frac{w,_\phi}{r}}}$$

(b) keskipinnan venymien ja liukuman sekä siirtymien yhteydet:

Kaavoista (1.70) ja (1.87) seuraa

$$\underline{\underline{\varepsilon_r}} = \frac{u,_r}{A} + \frac{\overbrace{A,_\phi}^{0} v}{AB} + \frac{\overbrace{w}^{0}}{R_r} = \underline{\underline{u,_r}}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon_\phi}} = \frac{v,_\phi}{B} + \frac{\overbrace{B,_r}^{1} u}{AB} + \frac{\overbrace{w}^{0}}{R_\phi} = \underline{\underline{\frac{v,_\phi}{r} + \frac{u}{r}}}$$

$$\underline{\underline{\gamma_{r\phi}}} = \frac{v,_r}{A} + \frac{u,_\phi}{B} - \frac{\overbrace{B,_r}^{1} v}{AB} - \frac{\overbrace{A,_\phi}^{0} u}{AB} = \underline{\underline{v,_r + \frac{u,_\phi}{r} - \frac{v}{r}}}$$

(c) käyristymien ja vääntymän sekä siirtymien yhteydet:

Kaavoista (1.98) ja (1.102) seuraa

$$\underline{\underline{\kappa_r}} = -\frac{1}{A}\left(\frac{1}{A} w,_r - \frac{\overbrace{1}^{0}}{R_r} u\right),_r - \frac{\overbrace{A_{,\phi}}^{0}}{AB}\left(\frac{1}{B} w,_\phi - \frac{\overbrace{1}^{0}}{R_\phi} v\right) = \underline{\underline{-w,_{rr}}}$$

$$\underline{\underline{\kappa_\phi}} = -\frac{1}{B}\left(\frac{1}{B} w,_\phi - \frac{\overbrace{1}^{0}}{R_\phi} v\right),_\phi - \frac{\overbrace{B,_r}^{1}}{AB}\left(\frac{1}{A} w,_r - \frac{\overbrace{1}^{0}}{R_s} u\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{r^2} w,_{\phi\phi} - \frac{w,_r}{r}}}$$

$$\underline{\underline{\kappa_{r\phi}}} = -\frac{1}{2}\left[\frac{B}{A}\left(\frac{w,_\phi}{B^2} - \frac{1}{B}\frac{\overbrace{v}^{0}}{R_\phi}\right),_r + \frac{A}{B}\left(\frac{w,_r}{A^2} - \frac{1}{A}\frac{\overbrace{u}^{0}}{R_r}\right),_\phi\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[r\left(\frac{w,_\phi}{r^2}\right),_r + \frac{w,_{r\phi}}{r}\right] = \underline{\underline{-\frac{w,_{r\phi}}{r} + \frac{w,_\phi}{r^2}}}$$

(d) tasapainoyhtälöt:

Kaavoista (1.111) seuraa

$$\begin{cases} \dfrac{1}{AB}[(BN_r),_r + (AN_{\phi r}),_\phi + \overbrace{A,_\phi}^{0} N_{r\phi} - \overbrace{B,_r}^{1} N_\phi] + \dfrac{\overbrace{Q_r}^{0}}{R_r} + q_r = 0, \\ \dfrac{1}{AB}[(AN_\phi),_\phi + (BN_{r\phi}),_r + \overbrace{B,_r}^{1} N_{\phi r} - \overbrace{A,_\phi}^{0} N_r] + \dfrac{\overbrace{Q_\phi}^{0}}{R_\phi} + q_\phi = 0, \\ \dfrac{1}{AB}[(BQ_r),_r + (AQ_\phi),_\phi] - \dfrac{\overbrace{N_r}^{0}}{R_r} - \dfrac{\overbrace{N_\phi}^{0}}{R_\phi} + q_n = 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}[(rN_r),_r + N_{\phi r},_\phi - N_\phi] + q_r = 0, \\ \dfrac{1}{r}[N_\phi,_\phi + (rN_{r\phi}),_r + N_{\phi r}] + q_\phi = 0, \\ \dfrac{1}{r}(rQ_r),_r + \dfrac{Q_\phi,_\phi}{r} + q_n = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_r,_r + \dfrac{N_{r\phi},_\phi}{r} + \dfrac{N_r - N_\phi}{r} + q_r = 0, \\ N_{r\phi},_r + \dfrac{N_\phi,_\phi}{r} + \dfrac{2N_{r\phi}}{r} + q_\phi = 0, \\ Q_r,_r + \dfrac{Q_r}{r} + \dfrac{Q_\phi,_\phi}{r} + q_n = 0. \end{cases}$$

Kaavoista (1.113) seuraa

$$\begin{cases} \dfrac{1}{AB}[(BM_r),_r + (AM_{\phi r}),_\phi + \overbrace{A,_\phi}^{0} M_{r\phi} - \overbrace{B,_r}^{1} M_\phi] - Q_r = 0 \\ \dfrac{1}{AB}[(AM_\phi),_\phi + (BM_{r\phi}),_r + \overbrace{B,_r}^{1} M_{\phi r} - \overbrace{A,_\phi}^{0} M_\theta] - Q_\phi = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}[(rM_r),_r + M_{\phi r},_\phi - M_\phi] - Q_r = 0 \\ \dfrac{1}{r}[M_\phi,_\phi + (rM_{r\phi}),_r + M_{\phi r}] - Q_\phi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_r,_r + \dfrac{M_{\phi r},_\phi}{r} + \dfrac{M_r - M_\phi}{r} - Q_r = 0 \\ \dfrac{M_\phi,_\phi}{r} + M_{r\phi},_r + \dfrac{2M_{r\phi}}{r} - Q_\phi = 0 \end{cases}$$

(e) Kaikki siirtymä- ja voimasuureet riippuvat pelkästään koordinaatista r. Sen lisäksi siirtymän $\phi-$viivan suuntainen komponentti $v=0$.

Kiertymien ja siirtymien yhteydet:

$$\underline{\underline{\varphi_r = w_{,r}}}, \quad \underline{\underline{\varphi_\phi}} = \frac{\overbrace{w_{,\phi}}^{0}}{B} = \underline{\underline{0}}$$

Keskipinnan venymien ja liukuman sekä siirtymien yhteydet:

$$\underline{\underline{\varepsilon_r = u_{,r}}}, \quad \underline{\underline{\varepsilon_\phi}} = \frac{\overbrace{v_{,\phi}}^{0}}{r} + \frac{u}{r} = \underline{\underline{\frac{u}{r}}}, \quad \underline{\underline{\gamma_{r\phi}}} = \overbrace{v}^{0}_{,r} + \frac{\overbrace{u_{,\phi}}^{0}}{r} - \frac{\overbrace{v}^{0}}{r} = \underline{\underline{0}}$$

Käyristymien ja vääntymän sekä siirtymien yhteydet:

$$\underline{\underline{\kappa_r = -w_{,rr}}}, \quad \underline{\underline{\kappa_\phi}} = -\frac{\overbrace{w_{,\phi\phi}}^{0}}{r^2} - \frac{w_{,r}}{r} = \underline{\underline{-\frac{w_{,r}}{r}}}, \quad \underline{\underline{\kappa_{r\phi}}} = -\frac{\overbrace{w_{,r\phi}}^{0}}{r} + \frac{\overbrace{w_{,\phi}}^{0}}{r^2} = \underline{\underline{0}}$$

(f) Normaalivoimat ja keskipinnan suuntainen leikkausvoima:

Kaavoista (1.121) seuraa

$$\underline{\underline{N_r}} = C(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\phi) = \underline{\underline{C(u_{,r} + \nu\frac{u}{r})}}, \quad \underline{\underline{N_\phi}} = C(\varepsilon_\phi + \nu\varepsilon_r) = \underline{\underline{C(\frac{u}{r} + \nu u_{,r})}},$$

$$\underline{\underline{N_{r\phi}}} = C\frac{1-\nu}{2}\overbrace{\gamma_{r\phi}}^{0} = \underline{\underline{0}}$$

Taivutusmomentit ja vääntömomentti:

Kaavoista (1.121) seuraa

$$\underline{\underline{M_r}} = D(\kappa_r + \nu\kappa_\phi) = \underline{\underline{-D(w_{,rr} + \nu\frac{w_{,r}}{r})}}, \quad \underline{\underline{M_\phi}} = D(\kappa_\phi + \nu\kappa_r) = \underline{\underline{-D(\frac{w_{,r}}{r} + \nu w_{,rr})}}$$

$$\underline{\underline{M_{r\phi}}} = D(1-\nu)\overbrace{\kappa_{r\phi}}^{0} = \underline{\underline{0}}$$

(g) Tasapainoyhtälöt:

$$\begin{cases} N_r{,}_r + \dfrac{\overbrace{N_{r\phi}{,}_\phi}^{0}}{r} + \dfrac{N_r - N_\phi}{r} + q_r = 0, \\ \overbrace{N_{r\phi}}^{0}{,}_r + \dfrac{\overbrace{N_\phi{,}_\phi}^{0}}{r} + \dfrac{2\overbrace{N_{r\phi}}^{0}}{r} + q_\phi = 0, \\ Q_r{,}_r + \dfrac{Q_r}{r} + \dfrac{\overbrace{Q_\phi{,}_\phi}^{0}}{r} + q_n = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_r{,}_r + \dfrac{N_r - N_\phi}{r} + q_r = 0, \\ Q_r{,}_r + \dfrac{Q_r}{r} + q_n = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_r{,}_r + \dfrac{\overbrace{M_{\phi r}{,}_\phi}^{0}}{r} + \dfrac{M_r - M_\phi}{r} - Q_r = 0 \\ \dfrac{\overbrace{M_\phi{,}_\phi}^{0}}{r} + \overbrace{M_{r\phi}}^{0}{,}_r + \dfrac{2\overbrace{M_{r\phi}}^{0}}{r} - Q_\phi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_r{,}_r + \dfrac{M_r - M_\phi}{r} - Q_\theta = 0 \\ Q_\phi = 0 \end{cases}$$

Tasapainoyhtälöt saatiin näin muotoon

$$\begin{cases} N_r{,}_r + \dfrac{N_r - N_\phi}{r} + q_r = 0, \\ Q_r{,}_r + \dfrac{Q_r}{r} + q_n = 0, \\ M_r{,}_r + \dfrac{M_r - M_\phi}{r} - Q_r = 0 \end{cases}$$

(h) Ratkaisemalla viimeisestä yhtälöstä Q_r saadaan

$$Q_r = M_r{,}_r + \frac{M_r - M_\phi}{r}.$$

Sijoittamalla tämä keskimmäiseen yhtälöön saadaan

$$(M_r{,}_r + \frac{M_r - M_\phi}{r}){,}_r + \frac{M_r{,}_r}{r} + \frac{M_r - M_\phi}{r^2} + q_n = 0$$

$\Rightarrow$

$$M_r,_{rr}+\frac{2M_r,_r}{r}-\frac{M_\phi,_r}{r}+q_n=0$$

Tasapainoyhtälöt ovat nyt

$$\begin{cases} N_r,_r+\dfrac{N_r-N_\phi}{r}+q_r=0, \\ M_r,_{rr}+\dfrac{2M_r,_r}{r}-\dfrac{M_\phi,_r}{r}+q_n=0. \end{cases}$$

(i) Sijoittamalla normaalivoimien ja siirtymien yhteydet ensimmäiseen yhtälöön, saadaan

$$C(u,_r+\nu\frac{u}{r}),_r+\frac{C(1-\nu)(u,_r-\frac{u}{r})}{r}+q_r=0,$$

$$\Rightarrow$$

$$u,_{rr}+\frac{u,_r}{r}-\frac{u}{r^2}+\frac{q_r}{C}=0$$

Sijoittamalla momenttien ja taipuman yhteydet toiseen yhtälöön, saadaan

$$-D(w,_{rr}+\nu\frac{w,_r}{r}),_{rr}-\frac{2D(w,_{rr}+\nu\frac{w,_r}{r}),_r}{r}+\frac{D(\frac{w,_r}{r}+\nu w,_{rr}),_r}{r}+q_n=0$$

$$\Rightarrow$$

$$w,_{rrrr}+\nu(\frac{w,_r}{r}),_{rr}+\frac{2}{r}w,_{rrr}+\frac{2}{r}\nu(\frac{w,_r}{r}),_r-\frac{1}{r}(\frac{w,_r}{r}),_r-\frac{\nu}{r}w,_{rrr}=\frac{q_n}{D}$$

$$\Rightarrow$$

$$w,_{rrrr}+\frac{2w,_{rrr}}{r}-\frac{w,_{rr}}{r^2}+\frac{w,_r}{r^3}=\frac{q_n}{D}$$

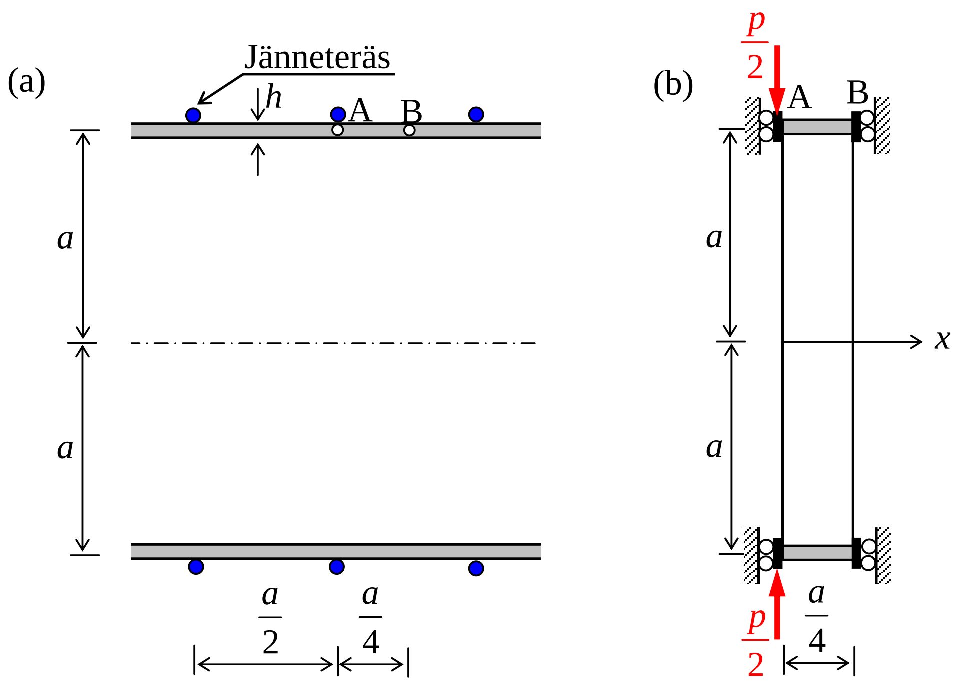
Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2009

Kotitehtävä 9:

Ympyrälieriön muotoinen säiliö (kuva a) on jännitetty tasavälein sijoitetuilla rengasmaisilla jänneteräksillä joiden jännevoima on P. Kuoren kimmomoduuli on E, Poissonin vakio on $\nu = 0,25$, säde on a, paksuus on $h = 0,05a$ ja jänteiden välinen etäisyys on $a/2$. Määritä jännittämisestä aiheutuvat kuoren tasipumen w, taivutusmomentin M_x ja normaalivoiman N_ϕ arvot jänteen kohdalla (piste A). Otaksutaan, että aksiaalinen normaalivoima $N_x = 0$.

Ohje: Jänteen ja kuoren välinen kosketuspaine voidaan otaksua rengaskuormaksi, jonka intensiteetti on $p = P/a$. Käytä äärellisen sylinterikuoren teoriaa ja kuvan (b) mukaista laskentamallia.

Vastaus: $w_A = -53,408\dfrac{P}{Ea}$, $M_{xA} = -0,03772P$, $N_{\phi A} = -2,670\dfrac{P}{a}$.



Palautus pe 20.11 klo 16.00 mennessä.

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2009

Kotitehtävän 9 ratkaisu:

Vaimennusluku ja taivutusjäykkyys:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{h^2a^2}} = \sqrt[4]{\frac{3(1-0,25^2)}{(0,05a)^2a^2}} = 5,791461\frac{1}{a}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{E(0,05a)^3}{12(1-0,25^2)} = \frac{1}{90000}Ea^3$$

Y-funktioiden arvot $\overline{Y}_i = Y_i(\beta L)$:

$$\overline{Y}_1 \equiv Y_1(\beta\frac{a}{4}) = 0,275230,\ \overline{Y}_2 \equiv Y_2(\beta\frac{a}{4}) = 1,237007,$$

$$\overline{Y}_3 \equiv Y_3(\beta\frac{a}{4}) = 0,997156,\ \overline{Y}_4 \equiv Y_4(\beta\frac{a}{4}) = 0,495301$$

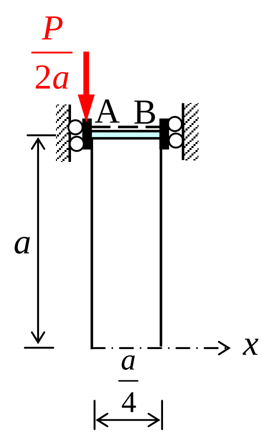
Yksityisratkaisu:

Kuorella ei jakautunutta kuormaa q_n ja $N_x = 0 \Rightarrow w_0 = 0$

Taipuma w, kiertymä φ_x, taivutusmomentti M_x ja leikkausvoima Q_x integrointivakioiden avulla:

$$w(x) = C_1Y_1(\beta x) + C_2Y_2(\beta x) + C_3Y_3(\beta x) + C_4Y_4(\beta x)$$
$$\varphi_x \equiv w' = \beta[-4C_1Y_4(\beta x) + C_2Y_1(\beta x) + C_3Y_2(\beta x) + C_4Y_3(\beta x)]$$
$$M_x \equiv -Dw'' = D\beta^2[4C_1Y_3(\beta x) + 4C_2Y_4(\beta x) - C_3Y_1(\beta x) - C_4Y_2(\beta x)]$$
$$Q_x \equiv M'_x = D\beta^3[4C_1Y_2(\beta x) + C_2 4Y_3(\beta x) + 4C_3Y_4(\beta x) - C_4Y_1(\beta x)]$$

Reunaehdot:



$$Q_x(0) \equiv -D\beta^3C_4 = \frac{P}{2a}$$
$$\varphi_x(0) \equiv \beta C_2 = 0$$
$$Q_x(\frac{a}{4}) \equiv D\beta^3(4C_1\overline{Y}_2 + 4C_2\overline{Y}_3 + 4C_3\overline{Y}_4 - C_4\overline{Y}_1) = 0$$
$$\varphi_x(\frac{a}{4}) \equiv \beta(-4C_1\overline{Y}_4 + C_2\overline{Y}_1 + C_3\overline{Y}_2 + C_4\overline{Y}_3) = 0$$

Integrointivakioiden määritys:

$$\underline{C_2 = 0}, \; C_4 = \underline{-\frac{P}{2D\beta^3 a}}$$

$$\begin{cases} 4\bar{Y}_2 C_1 + 4\bar{Y}_4 C_3 = -\dfrac{P}{2D\beta^3 a}\bar{Y}_1 \\ -4\bar{Y}_4 C_1 + \bar{Y}_2 C_3 = \dfrac{P}{2D\beta^3 a}\bar{Y}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4\bar{Y}_2 & 4\bar{Y}_4 \\ -4\bar{Y}_4 & \bar{Y}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \frac{P}{2D\beta^3 a} \begin{Bmatrix} -\bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_3 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4,948028 & 1,981204 \\ -1,981204 & 1,237007 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,275230 \\ 0,997156 \end{Bmatrix} \frac{P}{2D\beta^3 a}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,230545 \\ 0,436861 \end{Bmatrix} \frac{P}{2D\beta^3 a}$$

<u>Taipuma *w* pisteessä A:</u>

$$w_{\mathrm{A}} \equiv w(0) = C_1$$

$$= (-0,230545)\frac{P}{2D\beta^3 a} = (-0,230545)\frac{P}{2 \cdot \dfrac{Ea^3}{90000} \cdot (5,791461\dfrac{1}{a})^3 a}$$

$$= \underline{\underline{-53,408\frac{P}{Ea}}}$$

<u>Taivutusmomentti M_x pisteessä A:</u>

$$\underline{\underline{M_{x\mathrm{A}}}} = M_x(0) = -D\beta^2 C_3 = -D\beta^2 \cdot 0,436861\frac{P}{2D\beta^3 a} = -0,436861\frac{P}{2\beta a}$$

$$= \underline{\underline{-0,03772P}}$$

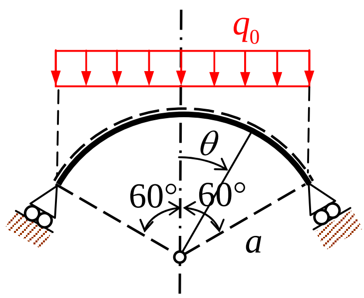
<u>Normaalivoima N_ϕ pisteessä A:</u>

$$N_{\phi\mathrm{A}} = \frac{Eh}{a}w_{\mathrm{A}} + \nu \overbrace{N_{x\mathrm{A}}}^{0} = \frac{E \cdot 0,05a}{a}(-53,408\frac{P}{Ea}) = \underline{\underline{2,670\frac{P}{a}}}$$

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2009

Kotitehtävä 10:

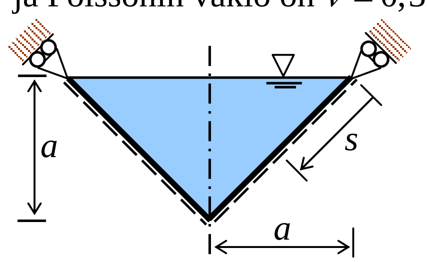
Osa (a): Oheista pallokalotin muotoista kuorta kuormittaa vaakatason pintayksikköä kohti tasan jakautunut lumikuorma q_0. Määritä kuoren kalvovoimat $N_\theta(\theta)$ ja $N_\phi(\theta)$ sekä piirrä niiden kuvaajat kulman θ funktiona. Määritä myös kalvotilan venymä ε_ϕ ja taipuma w kuoren reunalla. Kuoren paksuus on $h = 0{,}05a$ ja Poissonin vakio on $\nu = 0$.



Tuloksia kuoren reunalla:

$$N_\theta(60°) = -\frac{q_0 a}{2},\ N_\phi(60°) = \frac{q_0 a}{4},\ \varepsilon_\phi(60°) = 5\frac{q_0}{E},\ w(60°) = 5\frac{q_0 a}{E}$$

Osa (b): Määritä oheisen ympyräkartion muotoisen nestesäiliön kalvovoimat $N_s(s)$ ja $N_\phi(s)$ sekä venymät ε_s, ε_ϕ, derivaatta $d\varepsilon_\phi / ds$ ja taipuma w kuoren reunalla. Nesteen tiheys on ρ, kuoren paksuus on $h = a/250$ ja Poissonin vakio on $\nu = 0{,}3$.



Vastaus:

$$N_s = \frac{\sqrt{3}}{6}\rho g(a - \frac{s}{\sqrt{2}})(a + s\sqrt{2}),\ N_\phi = \rho g s(a - \frac{s}{\sqrt{2}}),\ \varepsilon_s(0) = \frac{250\sqrt{2}}{6}\frac{\rho g a}{E},$$

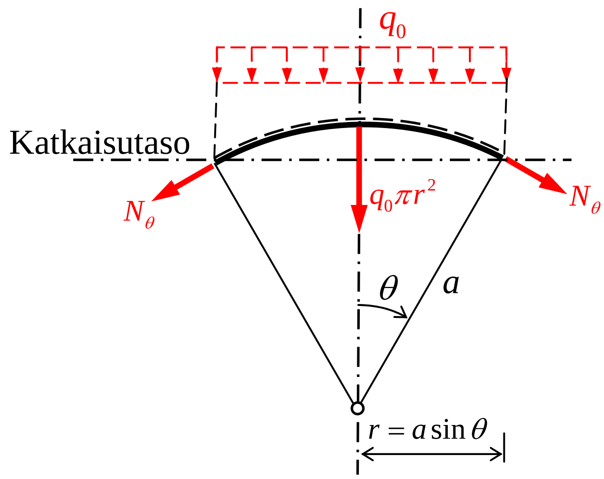
$$\varepsilon_\phi(0) = -\frac{25\sqrt{2}}{2}\frac{\rho g a}{E},\ \frac{d\varepsilon_\phi}{ds}(0) = \frac{475}{2}\frac{\rho g}{E},\ w(0) = -25\frac{\rho g a^2}{E}$$

Palautus pe 27.11 klo 16.00 mennessä.

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2009

Kotitehtävän 10 ratkaisu:

Osa (a):



Kalvovoimat:

$$\downarrow\ 2\pi r N_\theta \sin\theta + \pi r^2 q_0 = 0 \ \Rightarrow\ N_\theta = -\frac{q_0 r}{2\sin\theta} = \underline{\underline{-\frac{q_0 a}{2}}}$$

$$N_\phi = -\frac{\overbrace{R_\phi}^{a}}{\underbrace{R_\theta}_{a}} N_\theta + \overbrace{R_\phi}^{a} q_n = \frac{q_0 a}{2} - q_0 a\cos^2\theta = \underline{\underline{q_0 a(\frac{1}{2} - \cos^2\theta)}}$$

Venymä ε_ϕ:

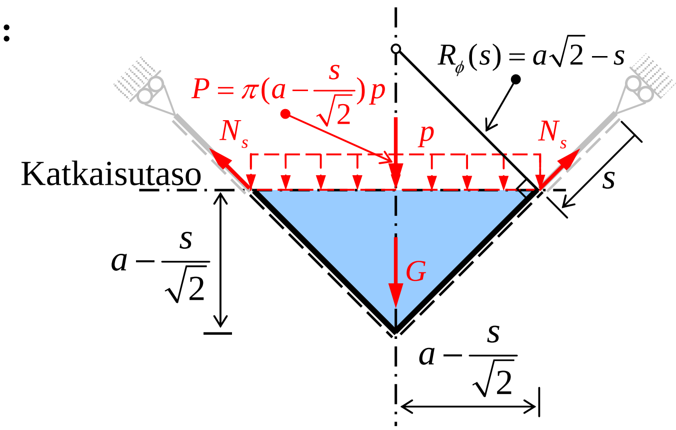
$$\varepsilon_\phi = \frac{1}{Eh}(N_\phi - \overbrace{\nu}^{0} N_\theta) = \underline{\frac{q_0 a}{Eh}(\frac{1}{2} - \cos^2\theta)}\,,\ \ \varepsilon_\phi(60°) = \frac{1}{4}\frac{q_0 a}{Eh} = \underline{\underline{5\frac{q_0}{E}}}$$

Taipuma:

$$w = -u\cot\theta + \overbrace{R_\phi}^{a}\varepsilon_\phi,$$

$$w(60°) = -\overbrace{u(60°)}^{0}\cot 60° + a\varepsilon_\phi(60°) = \underline{\underline{5\frac{q_0 a}{E}}}$$

Osa (b):



Paine katkaisutasolla ja sen resultantti:

$$p = \rho g \frac{s}{\sqrt{2}},\ P = \pi(a - \frac{s}{\sqrt{2}})^2 p = \frac{\pi\rho g}{\sqrt{2}} s(a - \frac{s}{\sqrt{2}})^2$$

Nesteen painovoima:

$$G = \rho g V = \rho g \frac{1}{3} Ah = \rho g \frac{1}{3}\pi(a - \frac{s}{\sqrt{2}})^2 (a - \frac{s}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi\rho g}{3}(a - \frac{s}{\sqrt{2}})^2 (a - \frac{s}{\sqrt{2}})$$

Tasapaino ja kalvovoima N_s:

$$\downarrow\quad -N_s \overbrace{\sin\theta}^{1/\sqrt{2}} \cdot 2\pi \overbrace{r}^{a-\frac{s}{\sqrt{2}}} + P + G = 0$$

$$\Rightarrow\ N_s = \frac{P+G}{\pi \frac{1}{\sqrt{2}}(a - \frac{s}{\sqrt{2}})} = \frac{\sqrt{2}}{\pi(a - \frac{s}{\sqrt{2}})}[\frac{\pi\rho g}{\sqrt{2}} s(a - \frac{s}{\sqrt{2}})^2 + \frac{\pi\rho g}{3}(a - \frac{s}{\sqrt{2}})^2 (a - \frac{s}{\sqrt{2}})]$$

$$= \underline{\underline{\frac{\rho g\sqrt{2}}{6}(a - \frac{s}{\sqrt{2}})(a + s\sqrt{2})}},\quad \underline{N_s(0) = \frac{\sqrt{2}}{6}\rho g a^2}$$

Kalvovoima N_ϕ:

$$N_\phi = R_\phi q_n = (a\sqrt{2} - s)p = (a\sqrt{2} - s)\cdot \rho g \frac{s}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\rho g s(a - \frac{s}{\sqrt{2}})}},\ \underline{N_\phi(0) = 0}$$

Kalvovoimien derivaatat:

$$\frac{dN_s}{ds} = \frac{\rho g}{6}(a - 2s\sqrt{2}),\ \underline{\frac{dN_\theta}{ds}(0) = \frac{\rho g a}{6}},$$

$$\frac{dN_\phi}{ds} = \rho g(a - s\sqrt{2}),\ \underline{\frac{dN_\phi}{ds}(0) = \rho g a.}$$

Venymät reunalla:

$$\varepsilon_s(0) = \frac{1}{Eh}[N_s(0) - \nu \overbrace{N_\phi(0)}^{0}] = \frac{250}{Ea} \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} \rho g a^2 = \underline{\underline{\frac{250\sqrt{2}}{6} \frac{\rho g a}{E}}}$$

$$\varepsilon_\phi(0) = \frac{1}{Eh}[N_\phi(0) - \nu \overbrace{N_s(0)}^{0}] = \frac{250}{Ea}(-0,3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} \rho g a^2) = \underline{\underline{-\frac{25\sqrt{2}}{2} \frac{\rho g a}{E}}}$$

Venymän ε_ϕ derivaatta reunalla:

$$\frac{d\varepsilon_\phi}{ds}(0) = \frac{1}{Eh}[\frac{dN_\phi}{ds}(0) - \nu \frac{dN_s}{ds}(0)] = \frac{250}{Ea}(\rho g a - 0,3 \cdot \frac{\rho g a}{6}) = \underline{\underline{\frac{475}{2} \frac{\rho g}{E}}}$$

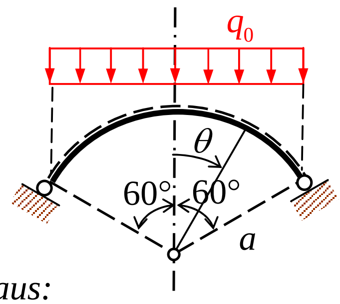
Taipuma reunalla:

$$w(0) = -\overbrace{u(0)}^{0} \cot\theta + \overbrace{R_\phi(0)}^{a\sqrt{2}} \varepsilon_\phi(0) = \underline{\underline{-25 \frac{\rho g a^2}{E}}}$$

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2009

Kotitehtävä 11:

Osa (a): Kotitehtävän 10 (a) pallokalotin muotoinen kuori tukeutuu nivelellisesti liikkumattomaan alustaan. Määritä leikkausvoima Q_θ tuella sekä piirrä taivutusmomentin $M_\theta(\theta)$ jakautuma tuen läheisyydessä. Arvioi piirroksen tarkkuudella maksimiarvo $M_{\theta,\max}$.

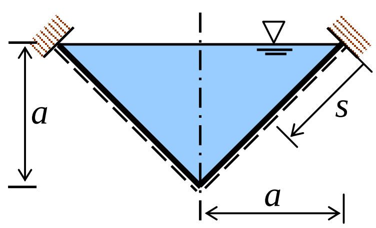


Osittainen vastaus:

$$Q_\theta(60°) = -0{,}02124 q_0 a,\ M_\theta(s) = 0{,}003608 q_0 a^2 e^{-5{,}886(\frac{\pi}{3}-\theta)} \sin[5{,}886(\frac{\pi}{3}-\theta)],$$

$$M_{\theta,\max} \approx 0{,}00116 q_0 a^2.$$

Osa (b): Kotitehtävän 10 (b) ympyräkartion muotoinen nestesäiliö on reunaltaan jäykästi kiinnitetty. Määritä taivutusmomentin M_s, leikkausvoiman Q_s ja kalvovoiman N_ϕ arvot kuoren reunalla.



Osittainen vastaus:

$$M_s(0) = 2{,}961 \cdot 10^{-6} \rho g a^3,\ Q_s(0) = -1{,}513 \cdot 10^{-3} \rho g a^2,\ N_\phi(0) = 0{,}07071 \rho g a^2$$

Palautus pe 4.12 klo 16.00 mennessä.

Rak-54.3100 Rakenteiden mekaniikka III, 2009

Kotitehtävän 11 ratkaisu:

Osa (a):

Kalvotilan taipuma reunalla 2 (vrt. Kotitehtävä 10 osa (a)):

$$w_2^K \equiv w^K(60°) = 5\frac{q_0 a}{E}$$

Vaimennusluku ja taivutusjäykkyys:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{h^2 R_\phi^2}} = \frac{5,88566}{a}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{1}{96000}Ea^3$$

Reunan leikkausvoiman määrittäminen:

$$w_2 \equiv \frac{1}{2D\beta^3}Q_2 - \frac{1}{2D\beta^2}\overbrace{M_2}^{0} + w_2^K = 0 \Rightarrow$$

$$Q_2 = -2D\beta^3 w_2^K = -2\cdot\frac{Ea^3}{96000}\cdot\frac{5,88566^3}{a^3}\cdot 5\frac{q_0 a}{E} = \underline{-0,021238 q_0 a}$$

Taivutusmomentti M_θ:

$$M_\theta \equiv M_\theta^T = \frac{e^{-\beta s}}{\beta}[\beta\overbrace{M_2}^{0}\cos\beta s + (-Q_2 + \beta\overbrace{M_2}^{0})\sin\beta s] = -\frac{Q_2}{\beta}e^{-\beta s}\sin\beta s$$

$$= -\frac{-0,021238 q_0 a}{5,88566/a}e^{-\beta s}\sin\beta s = 0,003608\cdot 10^{-3} q_0 a^2 e^{-\beta s}\sin\beta s$$

Käyttäen yhteyttä

$$s = (\frac{\pi}{3} - \theta)a$$

saadaan tästä

$$M_\theta = 0,003608 q_0 a^2 e^{-5,886(\frac{\pi}{3}-\theta)}\sin[5,886(\frac{\pi}{3}-\theta)]$$

Lasketaan taivutusmomentin M_θ arvoja:

θ	$M_\theta/(q_0a^2)$
$\pi/3$	0
$11\pi/36$	$1{,}061\cdot10^{-3}$
$5\pi/18$	$1{,}105\cdot10^{-3}$
$9\pi/36$	$7{,}724\cdot10^{-4}$
$4\pi/18$	$4{,}093\cdot10^{-4}$
$3\pi/18$	$9{,}873\cdot10^{-6}$
$2\pi/18$	$-4{,}879\cdot10^{-5}$
$\pi/18$	$-1{,}932\cdot10^{-5}$
0	$-9{,}042\cdot10^{-7}$
$21\pi/72$	$1{,}163\cdot10^{-3}$

Taivutusmomentin M_θ maksimiarvo:

$$\underline{\underline{M_{\theta,\max}\approx 0{,}00116q_0a^2}}$$

Osa (b):

Kalvotilan taipuma reunalla 1 (vrt. Kotitehtävä 10 osa (b)):

$$w_1^K\equiv w(0)=\underline{-25\frac{\rho g a^2}{E}}$$

Kalvotilan kiertymä reunalla 1:

$$\begin{aligned}\varphi_1^K\equiv\varphi_s^K(0)&=\cot\theta[\varepsilon_\phi^K(0)-\varepsilon_s^K(0)]+R_\phi(0)\frac{d\varepsilon_\phi}{ds}(0)\\&=\overbrace{\cot135^\circ}^{-1}\cdot[-\frac{25\sqrt{2}}{2}\frac{\rho g a}{E}-\frac{250\sqrt{2}}{6}\frac{\rho g a}{E}]+a\sqrt{2}\cdot\frac{475}{2}\frac{\rho g}{E}\\&=\underline{\frac{1750\sqrt{2}}{6}\frac{\rho g a}{E}}\end{aligned}$$

Vaimennusluku ja taivutusjäykkyys:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{h^2 R_\phi(0)^2}} = \sqrt[4]{\frac{3(1-0,3^2)}{(a/250)^2 \cdot (a\sqrt{2})^2}} = \frac{17,090}{a},$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{E\cdot(a/250)^3}{12(1-0,3^2)} = 5,8608\cdot 10^{-9} Ea^3$$

Reunan leikkausvoiman ja taivutusmomentin määrittäminen:

$$\left.\begin{aligned} w_1 &\equiv -\frac{1}{2D\beta^3}Q_1 - \frac{1}{2D\beta^2}M_1 + w_1^K = 0 \\ \varphi_1 &\equiv \frac{1}{2D\beta^2}Q_1 + \frac{1}{D\beta}M_1 + \varphi_1^K = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 + \beta M_1 = 2D\beta^3 w_1^K \\ Q_1 + 2\beta M_1 = -2D\beta^2\varphi_1^K \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1 + \dfrac{17,090}{a}M_1 = 2\cdot 5,8608\cdot 10^{-9}Ea^3(\dfrac{17,090}{a})^3(-25\dfrac{\rho g a^2}{E}) \\ Q_1 + 2\dfrac{17,090}{a}M_1 = -2\cdot 5,8608\cdot 10^{-9}Ea^3(\dfrac{17,090}{a})^2\dfrac{1750\sqrt{2}}{6}\dfrac{\rho g a}{E} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1 + 17,090\dfrac{M_1}{a} = -1,4627\cdot 10^{-3}\rho g a^2 \\ Q_1 + 34,180\dfrac{M_1}{a} = -1,4121\cdot 10^{-3}\rho g a^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1 = -1,5133\cdot 10^{-3}\rho g a^2 \\ \dfrac{M_1}{a} = 2,9608\cdot 10^{-6}\rho g a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(0) \equiv Q_1 = \underline{\underline{-1,5133\cdot 10^{-3}\rho g a^2}} \\ M_s(0) \equiv M_1 = \underline{\underline{2,9608\cdot 10^{-6}\rho g a^3}} \end{cases}$$

Kalvovoiman $N_\phi(s)$ lauseke:

$$N_\phi(s) = N_\phi^T(s) + N_\phi^K(s) = 2R_\phi \beta e^{-\beta s}[(-Q_1 - \beta M_1)\cos\beta s + \beta M_1 \sin\beta s] + \rho g s(a - \frac{s}{\sqrt{2}})$$

Kalvovoima N_ϕ reunalla:

$$\begin{aligned} N_\phi(0) &= 2R_\phi(0)\beta(-Q_1 - \beta M_1) \\ &= 2a\sqrt{2}\cdot\frac{17,090}{a}\cdot(1,5133\cdot 10^{-3}\rho g a^2 - \frac{17,090}{a}\cdot 2,9608\cdot 10^{-6}\rho g a^3) \\ &= \underline{\underline{0,07071\rho g a^2}} \end{aligned}$$