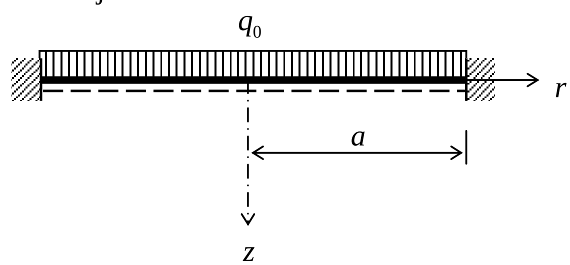
Osa III: Kimmoiset laatat

3. Laatan yhtälöt sylinterikoordinaatistossa

Tehtävä 3.1[1]:

Määritetään oheisen, tasaisen kuorman q_0 kuormittaman, jäykästi kiinnitetyn ympyrälaatan taipuman ja jännitysresultanttien jakautumat.



Ratkaisu:

Kaavakokoelman (s. 16) perusteella ympyrälaatan ratkaisu integrointivakioiden avulla lausuttuna on

$$\begin{aligned}
&w(r) = C_1 + C_2 r^2 + \bar{w}(r),\\
&\varphi_r(r) = 2C_2 r + \bar{\varphi}(r),\\
&M_r(r) = -2D(1+\nu)C_2 + \bar{M}_r(r),\\
&M_\phi(r) = -2D(1+\nu)C_2 + \bar{M}_\phi(r),\\
&Q_r(r) = -\frac{4D}{r}C_4 + \bar{Q}_r(r)
\end{aligned} \tag{a}$$

ja yksityisratkaisu (tasainen kuorma q_0) on:

$$\bar{w}(r) = \frac{1}{64}\frac{q_0}{D}r^4,\quad \bar{\varphi}_r = \frac{1}{16}\frac{q_0}{D}r^3,\quad \bar{M}_r = -\frac{3+\nu}{16}q_0 r^2,\quad \bar{M}_\phi = -\frac{1+3\nu}{16}q_0 r^2,\quad \bar{Q}_r = -\frac{1}{2}q_0 r. \tag{b}$$

Reunaehdot laatan jäykästi kiinnitetyllä reunalla ovat $w(a) = 0$ ja $\varphi_r(a) = 0$. Niistä seuraa yhtälöt

$$w(a) \equiv C_1 + C_2 a^2 + \overbrace{\bar{w}(a)}^{\frac{q_0}{64D}a^4} = 0,$$

$$\varphi_r(a) \equiv 2C_2 a + \overbrace{\bar{\varphi}_r(a)}^{\frac{q_0}{16D}a^3} = 0.$$

joista saadaan integrointivakioille

$$C_1 = \frac{1}{64}\frac{q_0 a^4}{D},\quad C_2 = -\frac{1}{32}\frac{q_0 a^2}{D}.$$

Sijoittamalla nämä ja yksitysratkaisun lausekkeet (b) lausekkeisiin (a) saadaan

[1] Tämä sama tehtävä on käsitelty luentomonisteessa.

$$w(r)=\frac{q_0a^4}{64D}-\frac{q_0a^2}{32D}r^2+\frac{q_0}{64D}r^4=\frac{q_0}{64D}(a^4-2a^2r^2+r^4)$$

$$=\underline{\underline{\frac{q_0}{64D}(a^2-r^2)^2}},$$

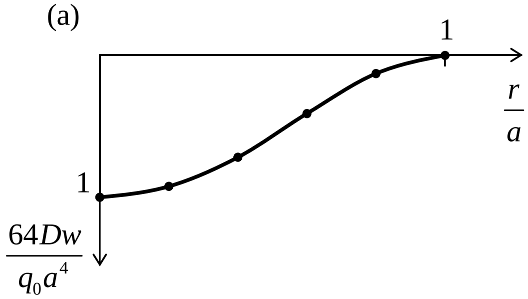
$$M_r(r)=-2D(1+\nu)(-\frac{q_0a^2}{32D})-\frac{3+\nu}{16}q_0r^2=\underline{\underline{\frac{q_0}{16}[(1+\nu)a^2-(3+\nu)r^2]}},$$

$$M_\phi(r)=-2D(1+\nu)(-\frac{q_0a^2}{32D})-\frac{1+3\nu}{16}q_0r^2=\underline{\underline{\frac{q_0}{16}[(1+\nu)a^2-(1+3\nu)r^2]}},$$

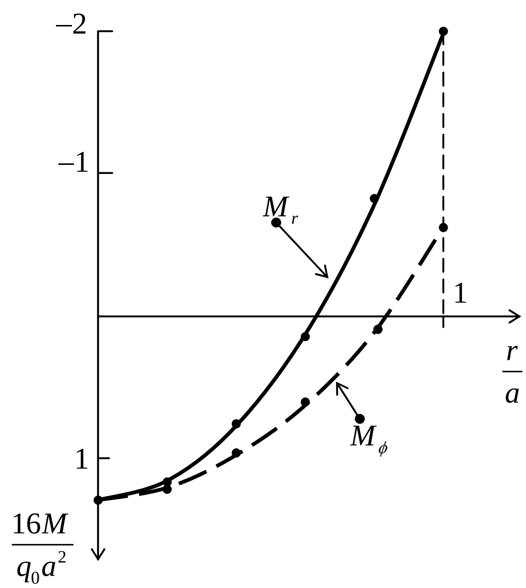
$$Q_r(r)=\underline{\underline{-\frac{1}{2}q_0r}}.$$

Oheisissa kuvissa (a), (b) ja (c) on esitetty taipuman, taivutusmomenttien ja leikkausvoiman kuvaajat, kun Poissonin vako on $\nu=0,3$.

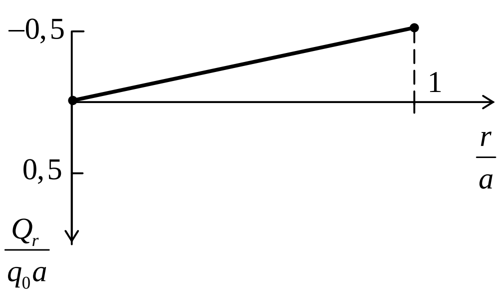
(a)



(b)

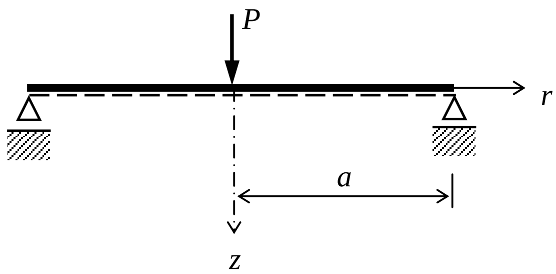


(c)



Tehtävä 3.2[2]**:**

Määritetään oheisen, keskipisteestään pistekuorman F kuormittaman, vapaasti tuetun ympyrälaatan taipuman ja jännitysresultanttien jakautumat.



Ratkaisu:

Kaavakokoelman (s. 16) perusteella ympyrälaatan, jonka keskellä on pistekuorma, ratkaisu integrointivakioiden avulla lausuttuna on

$$
\begin{aligned}
w(r) &= C_1 + C_2 r^2 + \frac{P}{8\pi D} r^2 \ln\frac{r}{r_0} + \bar{w}(r) \\
\varphi_r(r) &= 2C_2 r + \frac{P}{8\pi D} r(2\ln\frac{r}{r_0} + 1) + \bar{\varphi}(r), \\
M_r(r) &= -2D(1+\nu)C_2 - \frac{P}{8\pi}[2(1+\nu)\ln\frac{r}{r_0} + 3 + \nu] + \bar{M}_r(r), \\
M_\phi(r) &= -2D(1+\nu)C_2 - \frac{P}{8\pi}[2(1+\nu)\ln\frac{r}{r_0} + 1 + 3\nu] + \bar{M}_\phi(r), \\
Q_r(r) &= -\frac{P}{2\pi}\frac{1}{r}C_4 + \bar{Q}_r(r),
\end{aligned}
\tag{a}
$$

Koska jakautunutta kuormaa ei ole, yksityisratkaisu häviää, eli

$$\bar{w}(r) = \bar{\varphi}_r(r) = \bar{M}_r(r) = \bar{Q}_r(r) = 0\,. \tag{b}$$

Jos valitaan $r_0 = a$, ratkaisu saa muodon

[2] Tämä sama tehtävä on käsitelty hieman perusteellisemmin luentomonisteessa.

$$
\begin{aligned}
&w(r) = C_1 + C_2 r^2 + \frac{P}{8\pi D} r^2 \ln\frac{r}{a},\\
&\varphi_r(r) = 2C_2 r + \frac{P}{8\pi D} r(2\ln\frac{r}{a} + 1),\\
&M_r(r) = -2D(1+\nu)C_2 - \frac{P}{8\pi}[2(1+\nu)\ln\frac{r}{a} + 3 + \nu],\\
&M_\phi(r) = -2D(1+\nu)C_2 - \frac{P}{8\pi}[2(1+\nu)\ln\frac{r}{a} + 1 + 3\nu],\\
&Q_r(r) = -\frac{P}{2\pi}\frac{1}{r}.
\end{aligned}
\tag{c}
$$

Reunaehdot laatan vapaasti tuetulla reunalla ovat $w(a) = 0$ ja $M_r(a) = 0$. Niistä seuraa yhtälöt

$$
\begin{aligned}
&w(a) \equiv C_1 + C_2 a^2 = 0,\\
&M_r(a) \equiv -2D(1+\nu)C_2 - \frac{P}{8\pi}(3+\nu) = 0,
\end{aligned}
$$

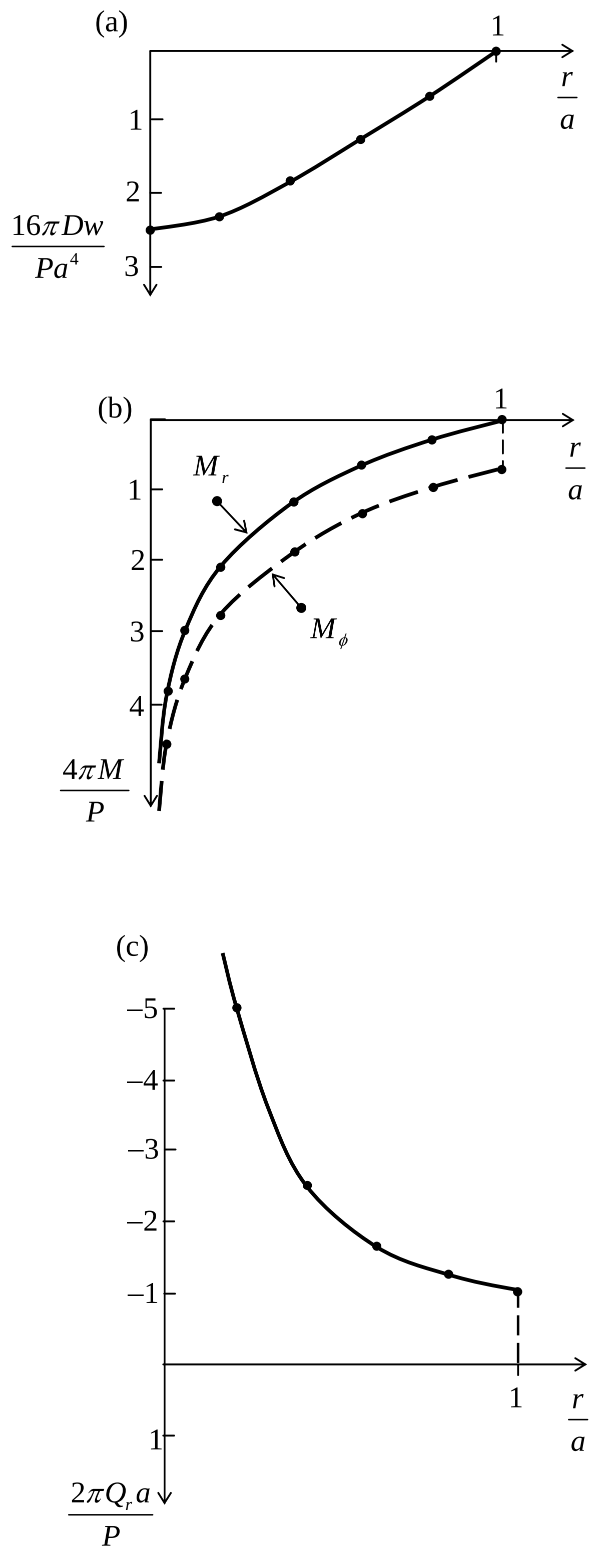
joiden ratkaisuna saadaan integrointivakioille

$$
C_1 = \frac{Pa^2}{16\pi D}\frac{3+\nu}{1+\nu}, \quad C_2 = -\frac{P}{16\pi D}\frac{3+\nu}{1+\nu}
$$

Nyt saadaan taipumalle ja jännitysresultanteille tulokset

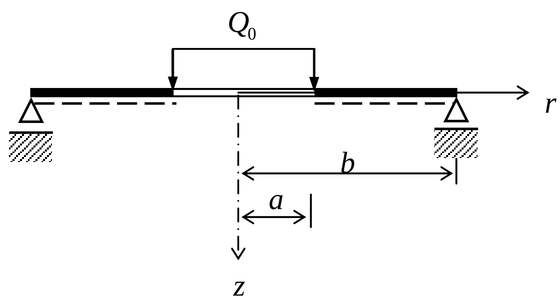
$$
\begin{aligned}
&w(r) = \frac{Pa^2}{D}\frac{1}{16\pi}[\frac{3+\nu}{1+\nu}(1-\frac{r^2}{a^2}) - 2\frac{r^2}{a^2}\ln\frac{a}{r}],\\
&M_r(r) = \frac{P}{4\pi}(1+\nu)\ln\frac{a}{r},\\
&M_\phi(r) = \frac{P}{4\pi}[1-\nu+(1+\nu)\ln\frac{a}{r}],\\
&Q_r(r) = -\frac{P}{a}\frac{1}{2\pi}\frac{a}{r}.
\end{aligned}
$$

Oheisissa kuvissa (a), (b) ja (c) on esitetty taipuman, taivutusmomenttien ja leikkausvoiman kuvaajat, kun Poissinin vakio $\nu = 0,3$.


(a)
1
r
a
1
2
3
16πDw
Pa4
(b)
1
r
a
M r
1
2
3
4
M ϕ
4πM
P
(c)
−5
−4
−3
−2
−1
1
r
a
1
2πQr a
P

Tehtävä 3.3[3]**:**

Oheinen rengaslaatta on sisäreunaltaan kuormitettu tasaisella viivakuormalla Q_0 ja ulkoreunaltaan vapaasti tuettu. Määritä taipuman lauseke.



Ratkaisu:

Koska laattaa ei kuormita jakautunut kuorma ($q = 0$) on yksityisratkaisu ja sitä vastaavat johdannaissuureet nollia ts. $\bar{w} = \bar{\varphi}_r = \bar{M}_r = \bar{M}_\phi = \bar{Q}_r = 0.$ Kun valitaan $r_0 = b$, ympyrärengaslaatan integrointivakoiden avulla lausuttu ratkaisu saa muodon

$$w(r) = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln\frac{r}{b} + C_4 r^2 \ln\frac{r}{b},$$

$$\varphi_r(r) = 2C_2 r + \frac{C_3}{r} + C_4 r(2\ln\frac{r}{b} + 1),$$

$$M_r(r) = -D\{2(1+\nu)C_2 - \frac{1-\nu}{r^2}C_3 + [2(1+\nu)\ln\frac{r}{b} + (3+\nu)]C_4\},$$

$$Q_r(r) = -\frac{4D}{r}C_4.$$

Reunaehdot laatan reunoilla ovat: $M_r(a) = 0$, $Q_r(a) = -Q_0$, $w(b) = 0$ ja $M_r(b) = 0$.

$$M_r(a) \equiv -D\{2(1+\nu)C_2 - \frac{1-\nu}{a^2}C_3 + [2(1+\nu)\ln\frac{a}{b} + (3+\nu)]C_4\} = 0,$$

$$Q_r(a) \equiv -\frac{4D}{a}C_4 = -Q_0,$$

$$w(b) \equiv C_1 + C_2 b^2 = 0,$$

$$M_r(b) \equiv -D[2(1+\nu)C_2 - \frac{1-\nu}{b^2}C_3 + (3+\nu)C_4] = 0.$$

Toisesta yhtälöstä saadaan aluksi

$$C_4 = \frac{Q_0 a}{4D},$$

[3] Tämä sama tehtävä on käsitelty hieman perusteellisemmin luentomonisteessa.

jonka jälkeen ensimmäinen ja neljäs yhtälö saavat muodon

$$-2(1+\nu)C_2+\frac{1-\nu}{a^2}C_3=[2(1+\nu)\ln\frac{a}{b}+(3+\nu)]\frac{Q_0 a}{4D},$$
$$-2(1+\nu)C_2+\frac{1-\nu}{b^2}C_3=(3+\nu)\frac{Q_0 a}{4D}.$$

Vähentämällä nämä yhtälöt puolittain saadaan

$$\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}(1-\nu)C_3=2(1+\nu)\ln\frac{a}{b}\frac{Q_0 a}{4D}\;\Rightarrow\;\mathrm{C}_3=\frac{Q_0 a}{2D}\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}\ln\frac{a}{b}.$$

Saadaa edelleen

$$C_2=\frac{1}{2b^2}\frac{1-\nu}{1+\nu}C_3-\frac{3+\nu}{1+\nu}\frac{Q_0 a}{8D}=-\frac{Q_0 a}{8D}(\frac{3+\nu}{1+\nu}-\frac{2a^2}{b^2-a^2}\ln\frac{a}{b})$$

ja

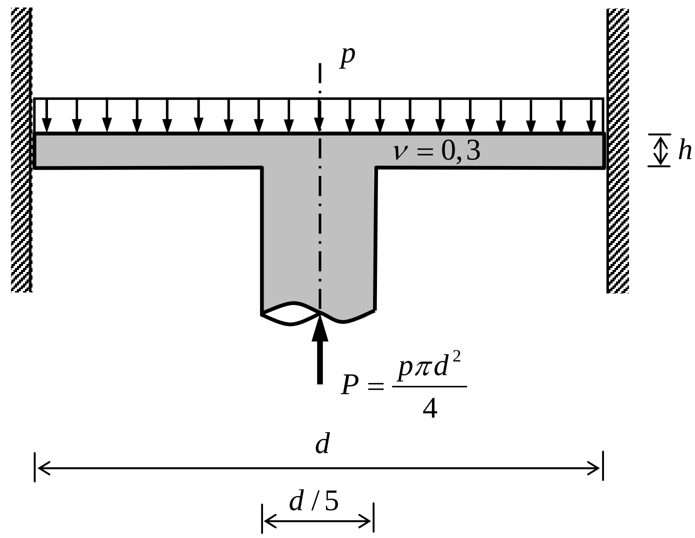
$$C_1=-C_2b^2=\frac{Q_0 ab^2}{8D}(\frac{3+\nu}{1+\nu}-\frac{2a^2}{b^2-a^2}\ln\frac{a}{b}).$$

Sijoittamalla saadut integrointivakioiden arvot taipuman lausekkeeseen saadaan tulos

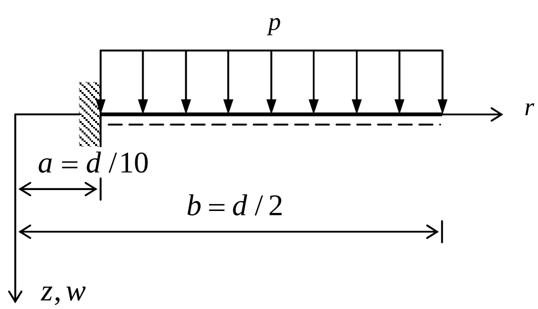
$$w(r)=C_1+C_2r^2+C_3\ln\frac{r}{b}+C_4r^2\ln\frac{r}{b}$$
$$=\underline{\underline{\frac{Q_0 a}{8D}[(\frac{3+\nu}{1+\nu}-\frac{2a^2}{b^2-a^2}\ln\frac{a}{b})(b^2-r^2)+4\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}\ln\frac{a}{b}\ln\frac{r}{b}+2r^2\ln\frac{r}{b}]}}.$$

Tehtävä 3.4:

Oheista ympyränmuotoista levymäistä mäntää kuormittaa painekuorma p. Määritä suurin männässä vaikuttava normaalijännitys $\sigma_{\max}$ ja suurin taipuma $w_{\max}$ otaksumalla mäntä ympyrärengaslaataksi, joka on ulko-reunaltaan vapaa ja sisäreunaltaan jäykästi kiinnitetty. Laatan kimmo-moduuli on E ja Poissonin vakio on $\nu = 0,3$.



Ratkaisu:



Tasaisella kuormalla kuormitetun ympyrärengaslaatan yleiset ratkaisut:

$$w(r) = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln\frac{r}{a} + C_4 r^2 \ln\frac{r}{a} + \frac{1}{64}\frac{p}{D} r^4 , \tag{1}$$

$$\varphi_r(r) = 2C_2 r + \frac{C_3}{r} + C_4 r(2\ln\frac{r}{a} + 1) + \frac{1}{16}\frac{p}{D} r^3 , \tag{2}$$

$$M_r(r) = -D\{2(1+\nu)C_2 - \frac{1-\nu}{r^2} C_3 + [2(1+\nu)\ln\frac{r}{a} + (3+\nu)]C_4\} - \frac{3+\nu}{16} pr^2 , \tag{3}$$

$$Q_r(r) = -\frac{4D}{r} C_4 - \frac{1}{2} pr . \tag{4}$$

Reunaehdot:

$$w(a) = C_1 + C_2 a^2 + \frac{1}{64}\frac{p}{D}a^4 = 0\,, \tag{5}$$

$$\varphi_r(a) = 2C_2 a + \frac{C_3}{a} + C_4 a + \frac{1}{16}\frac{p}{D}a^3 = 0, \tag{6}$$

$$M_r(b) = -D\{2(1+\nu)C_2 - \frac{1-\nu}{b^2}C_3 + [2(1+\nu)\ln\frac{b}{a} + (3+\nu)]C_4\} - \frac{3+\nu}{16}pb^2 = 0\,, \tag{7}$$

$$Q_r(b) = -\frac{4D}{b}C_4 - \frac{1}{2}pb = 0 \quad \Rightarrow \quad C_4 = -\frac{pb^2}{8D}.$$

Ottamalla huomioon, että $a = d/10,\ b = d/2$ ja $\nu = 0.3$, saadaan yhtälöt (6) ja (7) muo-toon

$$\frac{d}{5}C_2 + \frac{10}{d}C_3 = \frac{49}{16000}\frac{pd^3}{D} \approx 0.003063\frac{pd^3}{D}\,,$$

$$-2.6C_2 + \frac{2.8}{d^2}C_3 = -0.182329\frac{pd^2}{D}\,,$$

jonka ratkaisu on:

$$C_1 = -0.0006913\frac{pd^4}{D},\ C_2 = 0.068971\frac{pd^2}{D},\quad C_3 = -0.001073\frac{pd^4}{D}.$$

Yhtälöstä (5) saadaan tämän jälkeen.

Taipuman lauseke:

$$w(r) = -0.0006913\frac{pd^4}{D} + 0.068971r^2\frac{pd^2}{D} - 0.001073\frac{pd^4}{D}\ln\frac{10r}{d}$$
$$-\frac{pd^2}{32D}r^2\ln\frac{10r}{d} + \frac{1}{64}\frac{p}{D}r^4,$$

$$w(r) = (-0.0006913 + 0.068971(\frac{r}{d})^2 - 0.001073\ln\frac{10r}{d} - \frac{1}{32}(\frac{r}{d})^2\ln\frac{10r}{d} + \frac{1}{64}(\frac{r}{d})^4)\frac{pd^4}{D}.$$

Männän suurin taipuma esiintyy ympyrärengaslaatan ulkoreunalla:

$$\underline{\underline{w_{\max}}} = w(\frac{d}{2}) = 0.003227\frac{pd^4}{D} = \underline{\underline{0.03524\frac{pd^4}{Eh^3}}}. \qquad (D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)})$$

Taivutusmomentin lauseke:

$$M_r(r) = (-0.0762 - 0.0007511(\frac{d}{r})^2 + 0.08125\ln\frac{10r}{d} - 0.20625(\frac{r}{d})^2)\,pd^2 .$$

Itseisarvoltaan suurin taivutusmomentti esiintyy ympyrärengaslaatan sisäreunalla:

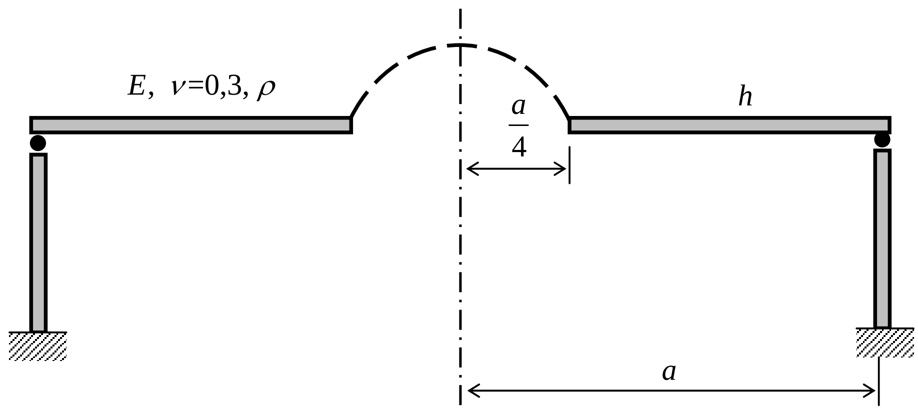
$$M_{r,\max} = M_r(\frac{d}{10}) = -0.15337\,pd^2 .$$

Itseisarvoltaan suurin normaalijännitys esiintyy myös ympyrärengaslaatan sisäreunalla, laatan ala- ja yläpinnalla:

$$\underline{\underline{\sigma_{\max}}} = \sigma_{r,\max} = \sigma_r(-\frac{h}{2}) = \frac{12M_{r,\max}}{h^3}(-\frac{h}{2}) = \underline{\underline{0.92024\frac{pd^2}{h^2}}} . \quad \text{(vetoa yläpinnalla)}$$

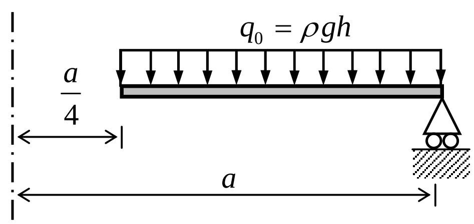
Tehtävä 3.5:

Kuvan mukainen, ympyrärenkaan muotoinen katto on ulkoreunaltaan vapaasti tuettu ja sisäreunaltaan vapaa. Laatan taivutusjäykkyys on D, Poissonin vakio on $\nu = 0,3$ ja tiheys on ρ. Määritä katon omasta painosta aiheutuvan taipuman $w(r)$ ja taivutusmomenttien $M_r(r)$ ja $M_\phi(r)$ lausekkeet sekä piirrä niiden jakautumat. Määritä myös (likimain) niiden suurimmat arvot.



Ohje: Laatan oma paino ajatellaan tavanomaiseen tapaan tasan jakautuneeksi kuormaksi, jonka suuruus on $q_0 = \rho g h$.

Ratkaisu:



Tasaisella kuormalla kuormitetun ympyrärengaslaatan integrointivakioiden avulla lausuttu ratkaisu, jossa on valittu $r_0 = a$, on

$$w(r) = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln\frac{r}{a} + C_4 r^2 \ln\frac{r}{a} + \frac{1}{64}\frac{q_0}{D} r^4$$

$$\varphi_r(r) = 2C_2 r + \frac{C_3}{r} + C_4 r(2\ln\frac{r}{a} + 1) + \frac{1}{16}\frac{q_0}{D} r^3 ,$$

$$M_r(r) = -D\{2(1+\nu)C_2 - \frac{1-\nu}{r^2}C_3 + [2(1+\nu)\ln\frac{r}{a} + 3 + \nu]C_4\} - \frac{3+\nu}{16} q_0 r^2 ,$$

$$M_\phi(r) = -D\{2(1+\nu)C_2 + \frac{1-\nu}{r^2}C_3 + [2(1+\nu)\ln\frac{r}{a} + 1 + 3\nu]C_4\} - \frac{1+3\nu}{16} q_0 r^2 ,$$

$$Q_r(r) = -\frac{4D}{r}C_4 - \frac{1}{2}q_0 r .$$

Reunaehdoista $Q_r(\frac{a}{4})=0$, $M_r(\frac{a}{4})=0$, $w(a)=0$ ja $M_r(a)=0$ seuraa yhtälöryhmä

$$Q_r(\frac{a}{4}) \equiv -\frac{16D}{a}C_4 - \frac{1}{8}q_0 a = 0,$$
$$M_r(\frac{a}{4}) \equiv -D\{2(1+\nu)C_2 - 16\frac{1-\nu}{a^2}C_3 + [2(1+\nu)\ln\frac{1}{4} + 3+\nu]C_4\} - \frac{3+\nu}{256}q_0 a^2 = 0,$$
$$w(a) \equiv C_1 + C_2 a^2 + \frac{1}{64}\frac{q_0}{D}a^4 = 0,$$
$$M_r(a) \equiv -D[2(1+\nu)C_2 - \frac{1-\nu}{a^2}C_3 + (3+\nu)C_4] - \frac{3+\nu}{16}q_0 a^2 = 0,$$

jota ratkaistaan alla

$$C_4 = -\frac{1}{128}\frac{q_0 a^2}{D}$$
$$\begin{cases} -2(1+\nu)C_2 + 16\frac{1-\nu}{a^2}C_3 = -[4(1+\nu)\ln\frac{1}{4} + 3+\nu]\frac{1}{256}\frac{q_0 a^2}{D} \\ -2(1+\nu)C_2 + \frac{1-\nu}{a^2}C_3 = \frac{21+7\nu}{128}\frac{q_0 a^2}{D} \end{cases} 1$$
$$\Rightarrow\ C_3 = -\frac{1}{1-\nu}[\frac{4}{15}(1+\nu)\ln\frac{1}{4} + 3+\nu]\frac{1}{256}\frac{q_0 a^4}{D}$$
$$\Rightarrow\ C_2 = \frac{1}{1+\nu}[-\frac{1-\nu}{2a^2}C_3 + \frac{21+7\nu}{256}\frac{q_0 a^2}{D}] = (\frac{2}{15}\ln\frac{1}{4} + \frac{15}{2}\frac{3+\nu}{1+\nu})\frac{1}{256}\frac{q_0 a^2}{D}$$

Ratkaisu on siis

$$C_1 = [\frac{2}{15}\ln\frac{1}{4} + \frac{37+7\nu}{2(1+\nu)}]\frac{1}{256}\frac{q_0 a^4}{D} \approx 0,0580220\frac{q_0 a^4}{D},$$
$$C_2 = -(\frac{2}{15}\ln\frac{1}{4} + \frac{15}{2}\frac{3+\nu}{1+\nu})\frac{1}{256}\frac{q_0 a^2}{D} \approx -0,0736470\frac{q_0 a^2}{D},$$
$$C_3 = -(\frac{4}{15}\frac{1+\nu}{1-\nu}\ln\frac{1}{4} + \frac{3+\nu}{1-\nu})\frac{1}{256}\frac{q_0 a^4}{D} \approx -0,0157334\frac{q_0 a^4}{D},$$
$$C_4 = -\frac{1}{128}\frac{q_0 a^2}{D} \approx -0,0078125\frac{q_0 a^2}{D}.$$

Sijoittamalla integrointivakioiden arvot taipuman ja taivutusmomenttien lausekkeisiin, saadaan:

$$w(r) = [0,0580220 - 0,0736470(\frac{r}{a})^2 - 0,0157334\ln\frac{r}{a}$$
$$- 0,0078125(\frac{r}{a})^2\ln\frac{r}{a} + 0,015625(\frac{r}{a})^4]\frac{q_0 a^4}{D}$$

$$M_r(r) = [0,21726 - 0,011013(\frac{a}{r})^2 + 0,020313\ln\frac{r}{a} - 0,20625(\frac{r}{a})^2]q_0a^2,$$

$$M_\phi(r) = [0,20633 + 0,011013(\frac{a}{r})^2 + 0,020313\ln\frac{r}{a} - 0,11875(\frac{r}{a})^2]q_0a^2.$$

Lasketaan arvoja:

r/a	$wD/(q_0a^4)$	$M_r/(q_0a^2)$	$M_\phi/(q_0a^2)$
0,25	0,0760	0	0,3470
0,375	0,0645	0,0900	0,2480
0,5	0,0528	0,1076	0,2066
0,625	0,0405	0,0990	0,1786
0,75	0,0273	0,0758	0,1533
0,875	0,0137	0,0423	0,1271
1	0	0	0,0986

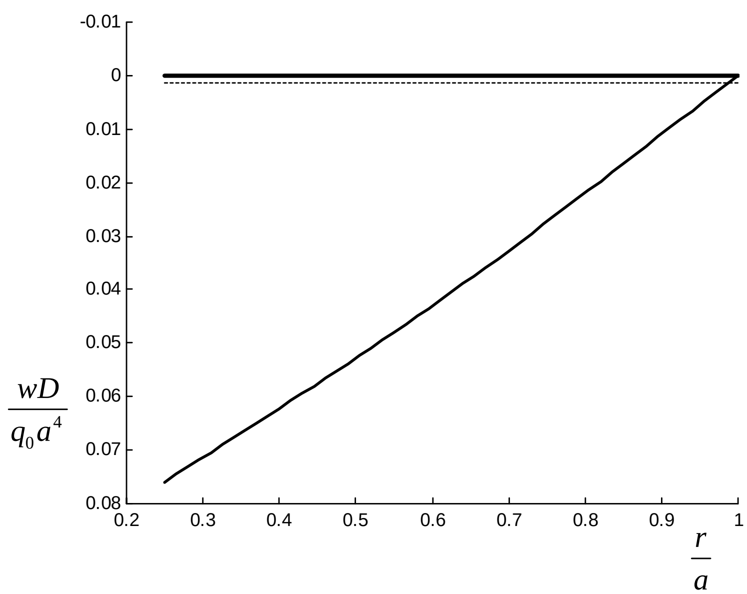
Kuvaajat ovat alla. Niistä nähdään, että

$$\underline{\underline{w_{\max} \approx 0,076\frac{q_0a^4}{D}}}$$

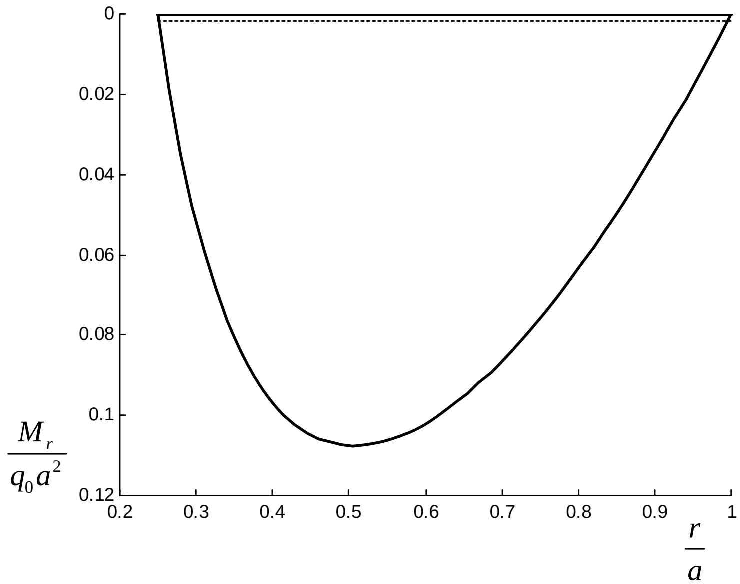
$$\underline{\underline{M_{r,\max} \approx 0,108q_0a^2}}$$

$$\underline{\underline{M_{\phi,\max} \approx 0,347q_0a^2}}$$

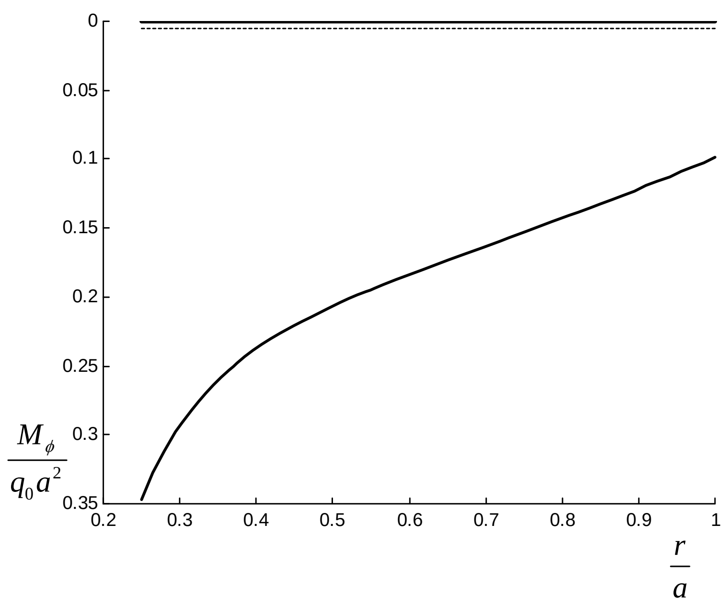
<u>Taipuma:</u>



Taivutusmomentti M_r :



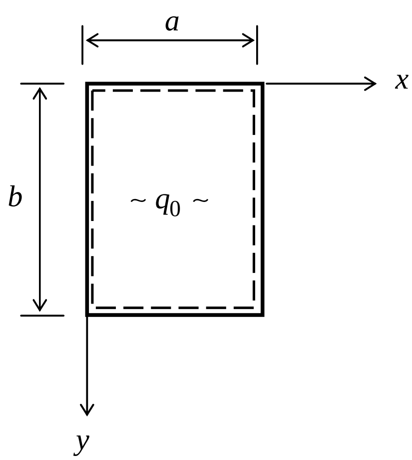
Taivutusmomentti M_r :



6. Laattojen ratkaiseminen Fourierin sarjojen avulla

Tehtävä 6.1[4]:

Vapaasti tuettu suorakaidelaatta, jota kuormittaa tasainen kuorma. Määritetään Navier'n menettelyllä kaavat laatan taipuman ja taivutusmomentin M_y laskemiseksi laatan keskipisteessä. Lasketaan niiden arvot sivusuhteen a/b arvoilla 1 ja 2 ottamalla sarjaan 5×5 termiä, kun Poissoin vakio on $\nu = 0,3$.



Ratkaisu:

Kuorman sarjan kertoimet:

$$q_{ij} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b q(x,y)\sin\alpha_i x \sin\beta_j y dxdy = \frac{4q_0}{ab}\int_0^a\int_0^b \sin\alpha_i x \sin\beta_j y dxdy$$

$$= \frac{4q_0}{ab}\left|_0^a \frac{\cos\alpha_i x}{\alpha_i}\right|_0^b \frac{\cos\beta_j y}{\beta_j} = \frac{4q_0}{ab\alpha_i\beta_j}(1-\cos\alpha_i a)(1-\cos\beta_j b) = \frac{4q_0}{\pi^2 ij}(1-\cos i\pi)(1-\cos j\pi)$$

Nähdään, että $q_{ij} = 0$, kun i ja j saavat parillisia arvoja. Parittomilla arvoilla i ja j saadaan

$$q_{ij} = \frac{16q_0}{ij\pi^2}, \quad (i, j = 1,3,5,\cdots)$$

Taipuman sarjan kertoimet:

$$w_{ij} = \frac{q_{ij}}{D(\alpha_i^2+\beta_j^2)^2} = \frac{16q_0}{ijD\pi^2(\alpha_i^2+\beta_j^2)^2} = \frac{16}{\pi^6}\frac{1}{ij[i^2(\frac{b}{a})^2 + j^2]^2}\frac{q_0 b^4}{D}, \quad (i, j = 1,3,5,\cdots)$$

[4] Tämä sama tehtävä on käsitelty hieman perusteellisemmin luentomonisteessa.

Taipuma w ja taivutusmomentti M_y laatan kesipisteessä:

$$w(\frac{a}{2},\frac{b}{2}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij} \sin\frac{\alpha_i a}{2}\sin\frac{\beta_j b}{2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij} \sin\frac{i\pi}{2}\sin\frac{j\pi}{2} = \underline{\underline{\frac{q_0 b^4}{D}\frac{16}{\pi^6}\sum_{i=1,3,\cdots}^{n}\sum_{ij=1,3,\cdots}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{2}\sin\frac{j\pi}{2}}{ij[(\frac{b}{a})^2 i^2 + j^2]^2}}}$$

$$M_y(\frac{a}{2},\frac{b}{2}) = D\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}(\nu\alpha_i^2 + \beta_j^2)\sin\frac{\alpha_i a}{2}\sin\frac{\beta_j b}{2} = \frac{D}{b^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\pi^2[i^2\nu(\frac{b}{a})^2 + j^2]\sin\frac{i\pi}{2}\sin\frac{j\pi}{2}$$

$$= \underline{\underline{q_0 b^2 \sum_{i=1,3,\cdots}^{n}\sum_{ij=1,3,\cdots}^{n}\frac{16}{\pi^4}\frac{[i^2\nu(\frac{b}{a})^2 + j^2]}{ij[(\frac{b}{a})^2 i^2 + j^2]^2}\sin\frac{i\pi}{2}\sin\frac{j\pi}{2}}}$$

Kummankin summan termien lukumääräksi on otettu *n*.

Lasketaan ko. suureet sivusuhteen a/b arvoilla 1 ja 2 ottamalla sarjaan 5×5 termiä.

Sivusuhde $a/b = 1$:

$$w(\frac{a}{2},\frac{b}{2}) = \frac{q_0 b^4}{D}\frac{16}{\pi^6}\sum_{i=1,3,\cdots}\sum_{j=1,3,5}\frac{\sin\frac{i\pi}{2}\sin\frac{j\pi}{2}}{ij[(i^2 + j^2)^2} \approx 0{,}004064\frac{q_0 b^4}{D}$$

$$M_y(\frac{a}{2},\frac{b}{2}) = q_0 b^2 \sum_{i=1,3,\cdots}^{n}\sum_{ij=1,3,\cdots}^{n}\frac{16}{\pi^4}\frac{i^2\nu + j^2}{ij(i^2 + j^2)^2}\sin\frac{i\pi}{2}\sin\frac{j\pi}{2} \approx 0{,}0482 q_0 b^2$$

Sivusuhde $a/b = 1$:

$$w(\frac{a}{2},\frac{b}{2}) = \frac{q_0 b^4}{D}\frac{16}{\pi^6}\sum_{i=1,3,\cdots}\sum_{j=1,3,5}\frac{\sin\frac{i\pi}{2}\sin\frac{j\pi}{2}}{ij[(i^2/4 + j^2)^2} \approx 0{,}010139\frac{q_0 b^4}{D}$$

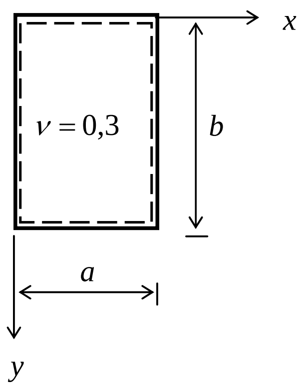
$$M_y(\frac{a}{2},\frac{b}{2}) = q_0 b^2 \sum_{i=1,3,\cdots}^{n}\sum_{ij=1,3,\cdots}^{n}\frac{16}{\pi^4}\frac{i^2\nu/4 + j^2}{ij(i^2/4 + j^2)^2}\sin\frac{i\pi}{2}\sin\frac{j\pi}{2} \approx 0{,}1023 q_0 b^2$$

Tehtävä 6.2:

Oheista vapaastituettua suorakaidelaattaa kuormittaa x-akselin suunnassa hydrostaattisesti jakautunut kuorma

$$q(x,y)=\frac{q_0 x}{a}.$$

Laatan taivutusjäykkyys on D ja Poissonin vakio $\nu=0,3$. Määritä Navierin menetelmällä (a) taipuman $w(x,y)$ ja taivutusmomentin $M_x(x,y)$ lausekkeet. Laske myös (b) taipuman ja taivutusmomentin M_x arvot laatan keskipisteessä, kun kysymyksessä on neliölaatta $(a=b)$. Käytä sarjakehitelmässä 5×5 termiä.



Ratkaisu:

Taipuman ja kuorman kaksoissinisarjat:

$$w(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} w_{ij}\sin\alpha_i x\sin\beta_j y\,,$$

$$q(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} q_{ij}\sin\alpha_i x\sin\beta_j y,$$

missä $\alpha_i = i\pi/a$, $\beta_j = j\pi/b$. Taipuman sarja toteuttaa automaattisesti vapaasti tuetun laatan reunaehdot eli $w=0$ kaikilla reunoilla, $\partial^2 w/\partial y^2 = 0$ x-akselin suuntaisilla reunoilla ja $\partial^2 w/\partial x^2 = 0$ y-akselin suuntaisilla reunoilla. Kuorman sarjan kertoimilla on lauseke

$$q_{ij}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b \frac{q_0 x}{a}\sin\alpha_i x\sin\beta_j y\,dxdy=\frac{4q_0}{a^2 b}\int_0^a x\sin\alpha_i x dx\int_0^b \sin\beta_j y\,dy\,,$$

missä

$$\int_0^a x\sin\alpha_i x dx = \Big|_0^a -\frac{x}{\alpha_i}\cos\alpha_i x - \int_0^a -\frac{1}{\alpha_i}\cos\alpha_i x dx$$

$$= -\frac{a}{\alpha_i}\cos\alpha_i a + \Big|_0^a \frac{1}{\alpha_i^2}\sin\alpha_i x = -\frac{a^2}{i\pi}\overbrace{\cos i\pi}^{(-1)^i} = \frac{(-1)^{i+1}a^2}{i\pi},$$

$$\int_0^b \sin\beta_j y dy = -\frac{b}{j\pi}\Big|_0^b \cos\frac{j\pi y}{b} = -\frac{b}{j\pi}(\cos j\pi - 1) = \begin{cases} \dfrac{2b}{j\pi}, & \text{kun } j \text{ pariton} \\ 0, & \text{kun } j \text{ parillinen} \end{cases}$$

Kuorman sarjan kertoimet ovat:

$$q_{ij} = \frac{4q_0}{a^2 b}\frac{(-1)^{i+1}a^2}{i\pi}\frac{2b}{j\pi} = \frac{(-1)^{i+1}8q_0}{ij\pi^2}, \quad \text{kun } j \text{ on pariton .}$$

Kun j on pariton, saadaan taipuman sarjan kertoimille

$$w_{ij} = \frac{q_{ij}}{D(\alpha_i^2+\beta_j^2)^2} = \frac{(-1)^{i+1}8q_0}{ij\pi^2}\frac{1}{D[(\frac{i\pi}{a})^2+(\frac{j\pi}{b})^2]^2} = \frac{(-1)^{i+1}8}{ij[(\frac{i}{a})^2+(\frac{j}{b})^2]^2\pi^6}\frac{q_0}{D}$$

ja taipuman sarjaksi saadaan

$$w(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}8}{ij[(\frac{i}{a})^2+(\frac{j}{b})^2]^2\pi^6}\frac{q_0}{D}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}.$$

Taivutusmomentille $M_x(x,y)$ saadaan

$$M_x(x,y) = -D(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) = D\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1,3,\cdots}^{\infty} w_{ij}(\alpha_i^2+\nu\beta_j^2)\sin\alpha_i x\sin\beta_j y\,.$$

Lasketaan taipuman ja taivutusmomentin arvot laatan keskipisteessä, kun $a=b$ ja sarjakehitelmässä 5×5 termiä.

Taipuma:

$$\underline{\underline{w(\frac{a}{2},\frac{a}{2})}} = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1,3,\cdots}^{5}\frac{(-1)^{i+1}8}{ij(i^2+j^2)^2\pi^6}\frac{q_0 a^4}{D}\sin\frac{i\pi}{2}\sin\frac{j\pi}{2} \approx \underline{\underline{0.002032\,\frac{q_0 a^4}{D}}}\,.$$

Taivutusmomentti:

$$\underline{\underline{M_x(\frac{a}{2},\frac{a}{2})}} = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1,3,\cdots}^{5}\frac{(-1)^{i+1}8(i^2+\nu j^2)}{ij(i^2+j^2)^2\pi^4}q_0 a^2\sin\frac{i\pi}{2}\sin\frac{j\pi}{2} \approx \underline{\underline{0.024117 q_0 a^2}}\,.$$