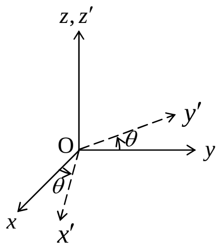
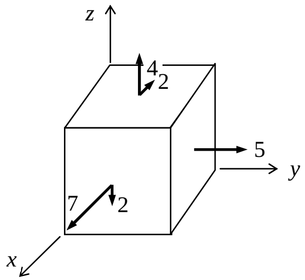
1. Koordinaatisto x', y', z' saadaan koordinaatistosta x, y, z kiertämällä sitä oikean käden ruuvisäännön mukaisesti kulman θ verran z-akselin ympäri. Jos pisteellä P on koordinaatit (1,1,1) $x, y, z-$koordinaatistossa, määritä sen koordinaatit $x', y', z'-$ koordinaatistossa. Jos pisteellä Q on koordinaatit (1,1,1) $x', y', z'-$koordinaatistossa, määritä sen koordinaatit $x, y, z-$koordinaatistossa.
   Vastaus:
   $x' = \cos\theta + \sin\theta,\ y' = -\sin\theta + \cos\theta,\ z' = 1\ \ x = \cos\theta - \sin\theta,\ y = \sin\theta + \cos\theta,\ z = 1$



2. Tarkasteltavan pisteen P jännitystila x, y, z-koordinaatistossa on esitetty oheisen kuvion avulla



   Määritä jännityskomponentit ja jännitysmatriisi sekä jännitysvektori (traktio), normaalijännitys, normaalijännitysvektori, leikkausjännitysvektori sekä leikkausjännityksen suuruus pisteen P kautta kulkevalla tasolla, jonka yksikkönormaalivektori on $\mathbf{n} = (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})/3$. Yksiköt ovat MPa. (Niitä ei tarvitse merkitä laskelmaan).
   Osittainen vastaus: $\mathbf{t}^{(n)} = 4\mathbf{i} + 10/3 \cdot \mathbf{j}$, $\sigma_n = 44/9$, $\boldsymbol{\tau}^{(n)} = 2/27 \cdot (10\mathbf{i} + \mathbf{j} - 22\mathbf{k})$

3. Pisteen jännitystila on esitetty jännitysmatriisina

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{MPa}\,.$$

   $x, y, z-$koordinaatistossa. Määritä jännitysmatriisi $[\sigma']$ $x', y', z'-$ koordinaatistossa, jonka $x'-$ ja $z'-$akselien suuntaiset kantavektorin ovat $\mathbf{l} = (\mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{2}$, $\mathbf{n} = (-\sqrt{2}\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})/2$.

$$\textit{Vastaus: } [\sigma'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1-\sqrt{2} & -1 \\ 2 & -1 & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Palautettavat kotitehtävät

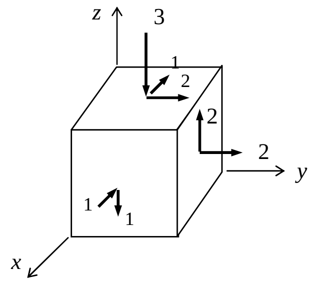
Palautus **pe 28.9 klo 16.00 mennessä**, toisen kerroksen huoneen R230 oven vieressä olevaan laatikkoon.

I. Selitä sanallisesti, lyhyesti ja mahdollisimman täsmällisesti seuraavat käsitteet: (a) Jännitysvektori eli traktio, (b) Jännitysvektorin komponentit, (c) Normaali- ja leikkausjännitysvektorit, (d) Normaalijännitys ja leikkausjännityksen suuruus sekä (e) Jännityskomponentit.

II. Tarkasteltavan pisteen P jännitystila x, y, z-koordinaatistossa on esitetty oheisen kuvion avulla Yksiköt ovat MPa. (a) Määritä jännitysmatriisi $[\sigma]$, jännitysvektori (traktio) $\mathbf{t}^{(n)}$, normaalijännitys σ_n, normaalijännitysvektori $\boldsymbol{\sigma}^{(n)}$, leikkausjännitysvektori $\boldsymbol{\tau}^{(n)}$ ja leikkausjännityksen suuruus $\tau^{(n)}$ tasolla, jonka normaali muodostaa kulmat $45°$ ja $60°$ $x-$ ja $y-$akselien suhteen.
Osittainen vastaus:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n)} = \left(\frac{-4+\sqrt{2}}{8}\mathbf{i} + \frac{1-2\sqrt{2}}{8}\mathbf{j} + \frac{1-2\sqrt{2}}{8}\mathbf{k}\right)\text{MPa}$$

$$\boldsymbol{\tau}^{(n)} = \left(-\frac{5\sqrt{2}}{8}\mathbf{i} + \frac{15+2\sqrt{2}}{8}\mathbf{j} - \frac{5+2\sqrt{2}}{8}\mathbf{k}\right)\text{MPa}$$



III. Jännitysvektorit kolmella tarkasteltavan pisteen kautta kulkevalla tasolla ja ko. tasojen yksikkönormaalivektorit ovat

$$\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{i},$$

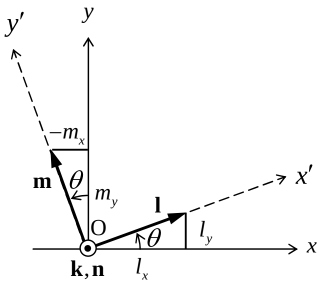
$$\mathbf{t}^{(n)} = 2\sqrt{3}\mathbf{i} + 2\sqrt{3}\mathbf{j}, \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}),$$

$$\mathbf{t}^{(n)} = 2(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}), \quad \mathbf{n} = \mathbf{j}.$$

Määritä jännityskomponentit ko. pisteessä ja sen matriisi. Yksiköt voidaan jättää pois.
Osittainen vastaus:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

1.



Oheisesta kuviosta nähdään helposti, että kantavektorien $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$ ja $\mathbf{n}$ komponentit ovat
$l_x = \cos\theta,\ l_y = \sin\theta,\ l_z = 0,$

$m_x = -\sin\theta,\ m_y = \cos\theta,\ m_z = 0,$

$n_x = \cos\theta,\ n_y = \sin\theta,\ n_z = 1,$

Koordinaatiston muunnosmatriisi ja origon O′ paikkavektori

$$[L] = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z \\ m_x & m_y & m_z \\ n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \{x_0\} = \{0\}\,.$$

Muunnos koordinaatistosta x, y, z koordinaatistoon x', y', z':

$$\{x'\} = [L]^T(\{x'\} - \{x_0\}) = [L]\{x\}$$

Pisteen P koordinaateille saadaan:

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ x' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos\theta + \sin\theta \\ -\sin\theta + \cos\theta \\ 1 \end{Bmatrix}$$

eli

$x' = \underline{\underline{\cos\theta + \sin\theta}},\ y' = \underline{\underline{-\sin\theta + \cos\theta}},\ z' = \underline{\underline{1}}\,.$

Muunnos koordinaatistosta x', y', z' koordinaatistoon x, y, z:

$$\{x\} = \{x_0\} + [L]^T\{x'\} = [L]^T\{x'\}$$

Pisteen Q koordinaateille saadaan:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos\theta - \sin\theta \\ \sin\theta + \cos\theta \\ 1 \end{Bmatrix}$$

eli

$x = \underline{\underline{\cos\theta - \sin\theta}},\ y = \underline{\underline{\sin\theta + \cos\theta}},\ z = \underline{\underline{1}}$

2.

Jännityskomponentit:

$\sigma_x = 7,\ \sigma_y = 5,\ \sigma_z = 4,$

$\tau_{xy} = 0,\ \tau_{yz} = 0,\ \tau_{zx} = -2$

Jännitysmatriisi:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Jännitysvektori:

$$\{t\}^{(n)} = [\sigma]\{n\} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 10/3 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

$$\underline{\underline{\mathbf{t}^{(n)} = 4\mathbf{i} + \frac{10}{3}\mathbf{j}}}$$

Normaalijännitys:

$$\sigma_n = \mathbf{n}\bullet\mathbf{t}^{(n)} = (\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k})\bullet(4\mathbf{i} + \frac{10}{3}\mathbf{j}) = \frac{2}{3}\cdot 4 + \frac{2}{3}\cdot\frac{10}{3} = \underline{\underline{\frac{44}{9}}}$$

Normaalijännitysvektori:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n)} = \sigma_n\mathbf{n} = \frac{44}{9}(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}) = \underline{\underline{\frac{44}{27}(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})}}$$

Leikkausjännitysvektori:

$$\boldsymbol{\tau}^{(n)} = \mathbf{t}^{(n)} - \boldsymbol{\sigma}^{(n)} = 4\mathbf{i} + \frac{10}{3}\mathbf{j} - \frac{44}{27}(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \underline{\underline{\frac{2}{27}(10\mathbf{i} + \mathbf{j} - 22\mathbf{k})}}$$

Leikkausjännityksen suuruus:

$$\tau^{(n)} = \sqrt{|\,\mathbf{t}^{(\mathbf{n})}|^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{4^2 + (-\frac{10}{3})^2 - (\frac{44}{9})^2} = \sqrt{\frac{260}{81}} = \underline{\underline{\frac{2}{9}\sqrt{65}}}$$

tai

$$\tau^{(n)} = |\,\boldsymbol{\tau}^{(n)}| = \frac{2}{27}|10\mathbf{i} + \mathbf{j} - 22\mathbf{k}| = \frac{2}{27}\sqrt{10^2 + 1^2 + 22^2} = \underline{\underline{\frac{2}{9}\sqrt{65}}}$$

3.

y' – akselin suuntainen kantavektori:
kantavektorien ristitulon lausekkeesta $\mathbf{n}\times\mathbf{l}=\mathbf{m}$ seuraa

$$\mathbf{m}=\mathbf{n}\times\mathbf{l}=\frac{1}{2}(-\sqrt{2}\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})\times\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{j}+\mathbf{k})=\frac{1}{2\sqrt{2}}(-\sqrt{2}\,\overbrace{\mathbf{i}\times\mathbf{j}}^{\mathbf{k}}-\sqrt{2}\,\overbrace{\mathbf{i}\times\mathbf{k}}^{-\mathbf{j}}+\overbrace{\mathbf{j}\times\mathbf{j}}^{\mathbf{0}}+\overbrace{\mathbf{j}\times\mathbf{k}}^{\mathbf{i}}-\overbrace{\mathbf{k}\times\mathbf{j}}^{-\mathbf{i}}-\overbrace{\mathbf{k}\times\mathbf{k}}^{\mathbf{0}})$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{2}\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})$$

Kantavektoreiden $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$ ja $\mathbf{n}$ komponentit:

$$l_x=0,\ l_y=\frac{1}{\sqrt{2}},\ l_z=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$m_x=\frac{1}{\sqrt{2}},\ m_y=\frac{1}{2},\ m_z=-\frac{1}{2},$$

$$n_x=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ n_y=\frac{1}{2},\ n_z=-\frac{1}{2}.$$

Koordinaatiston muunnosmatriisi:

$$[L]=\begin{bmatrix}0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2\\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2\end{bmatrix}$$

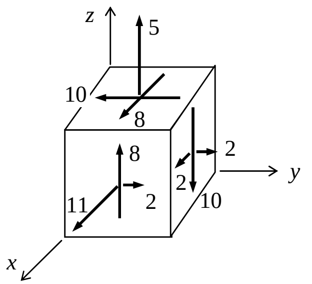
Saadaan:

$$[\sigma']=[L][\sigma][L]^T=\begin{bmatrix}0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2\\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2\\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & -1/2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2\\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\sqrt{2} & \sqrt{2}-1 & -\sqrt{2}-1\\ 1 & -\sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2}/2\\ -1 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{bmatrix}=\underline{\underline{\begin{bmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 1-\sqrt{2} & -1\\ 2 & -1 & 1+\sqrt{2}\end{bmatrix}}}$$

Jännitystensorin symmetrian takia tuloksen tulee olla symmetrinen. Tämä on hyvä tarkistus.

1. Määritä oheiselle jännitystilalle jännitysinvariantit, pääjännitykset suuruusjärjestyksessä, suurin leikkausjännitys ja sitä vastaava normaalijännitys. Yksikkönä on MPa.
   Ohje: Ratkaise syntyvä kolmen asteen yhtälö taskulaskimella (tai Mathcad ohjelmalla).
   Vastaus: $I_1 = 18\text{MPa}$, $I_2 = -81(\text{MPa})^2$, $I_3 = -1458(\text{MPa})^3$,
   $\sigma_I = 18\text{MPa}$, $\sigma_{II} = 9\text{MPa}$, $\sigma_{III} = -9\text{MPa}$, $\tau_{\max} = 13{,}5\text{MPa}$, $\sigma_\tau = 4{,}5\text{MPa}$.



2. Määritä oheiselle jännitystilalle edelleen suurimman pääjännityksen suuntainen yksikkövektori.
   Vastaus: $\mathbf{n} = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$.

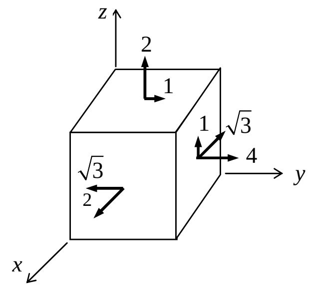
3. Kappaleen jännitystila karteesisessa $x, y, z-$koordinaatistossa on esitetty matriisina
   $$[\sigma] = \begin{bmatrix} 3xy & 5y^2 & 0 \\ 5y^2 & 0 & 2z \\ 0 & 2z & 0 \end{bmatrix}.$$
   Millaisen tilavuusvoiman $\mathbf{f}(x, y, z)$ tulisi vaikuttaa, että tasapaino vallitsisi kaikissa kappaleen pisteissä.
   Ohje: Jännityskomponenttien ja tilavuusvoiman $\mathbf{f}$ komponenttien tulee toteuttaa tasapainoyhtälö.
   Vastaus: $\mathbf{f} = -13y\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.

Palautettavat kotitehtävät

Palautus **pe 5.10.2012 klo 16.00 mennessä**, toisen kerroksen huoneen R230 oven vieressä olevaan laatikkoon.

I. Tarkasteltavan pisteen P jännitystila x, y, z-koordinaatistossa on esitetty oheisen kuvion (seuraavalla sivulla) avulla. Yksiköt ovat MPa. Määritä (a) pääjännitykset suurusjärjestyksessä sekä (b) suurin leikkausjännitys ja sitä vastaava normaalijännitys ratkaisemalla suoraan pääjännitysten determinanttiyhtälö.
Osittainen vastaus: $\sigma_I = (3+\sqrt{5})\text{MPa}$, $\tau_{\max} = \sqrt{5}\text{MPa}$

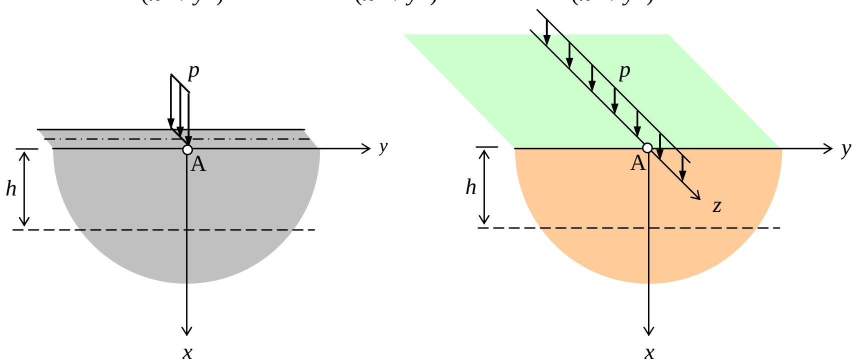
Harjoitus 2 Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi



II. Määritä tehtävän I jännitystilalle vielä suurimman pääjännityksen suuntainen yksikkövektori.

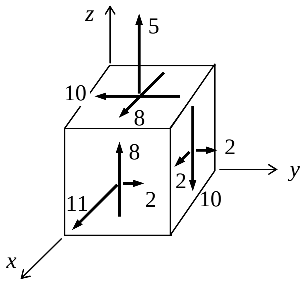
III. Vasen kuva esittää suuren levyn reunaa ja oikea kuva maan pintaa, joihin kohdistuu tasan jakautunut viivakuorma p. Edellinen on tasojännitys- ja jälkimmäinen tasomuodonmuutostehtävä ja ne voidaan käsitellä tasotehtävinä $x, y-$tasossa. Kuormasta aiheutuville jännityskomponenteille kummassakin tapauksessa on esitetty lausekkeet.

$$\sigma_x = -\frac{2p}{\pi}\frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad \sigma_y = -\frac{2p}{\pi}\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{2p}{\pi}\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}.$$



Varmista, että lausekkeet ovat tehtävän ratkaisu osoittamalla, että (a) ne toteuttavat jännityskomponenttien tasapainoyhtälöt, joissa tilavuusvoimia ei ole ($f_x = f_y = 0$), (b) jännityskomponentit σ_x ja τ_{xy} tasolla $x = 0$ häviävät sekä (c) syvyydellä $x = h$ pinnasta vaikuttavan normaalijännityksen σ_x resultantti on $-p$. (d) Määritä normaalijännityksen σ_x lauseke $x-$akselilla ja piirrä sen dimensiottoman arvon $\sigma_x h / p$ kuvaaja dimensiottoman koordinaatin x/h funktiona. Mitä tapahtuu kuormituspisteessä A ($x = 0$)? (e) Määritä jännityskomponenttien σ_x, σ_y ja τ_{xy} lausekkeet syvyydelle $y = h$ ja piirrä niiden dimensiottomien arvojen kuvaajat dimensiottoman koordinaatin y/h funktion.

1.



Kuvan perusteella:

$\sigma_x = 11\text{MPa},\ \sigma_y = 2\text{MPa},\ \sigma_z = 5\text{MPa},\ \tau_{xy} = 2\text{MPa},\ \tau_{yz} = -10\text{MPa},\ \tau_{zx} = 8\text{MPa}$

$\Rightarrow$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 11 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & -10 \\ 8 & -10 & 5 \end{bmatrix}$$

Jännitysinvariantit:

$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 11 + 2 + 5 = \underline{\underline{18\text{MPa}}}$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_z & \tau_{zx} \\ \tau_{zx} & \sigma_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -10 \\ -10 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= 22 - 4 + 10 - 100 + 55 - 64 = \underline{\underline{-81(\text{MPa})^2}}$$

$$I_3 = \det[\sigma] = \begin{vmatrix} 11 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & -10 \\ 8 & -10 & 5 \end{vmatrix} = 11\begin{vmatrix} 2 & -10 \\ -10 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -10 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 8 & -10 \end{vmatrix}$$

$$= 11(10 - 100) - 2(10 + 80) + 8(-20 - 16) = \underline{\underline{-1458(\text{MPa})^3}}$$

Yhtälörymä pääjännityksille:

$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \ \Leftrightarrow\ \sigma^3 - 18\sigma^2 - 81\sigma + 1458 = 0$

Ratkaisu (taskulaskimella):

$\sigma_1 = -9\text{MPa},\ \sigma_2 = 18\text{MPa},\ \sigma_3 = 9\text{MPa},$

Pääjännitykset suuruusjärjestyksessä:

$\sigma_I = \underline{\underline{18\text{MPa}}},\ \sigma_{II} = \underline{\underline{9\text{MPa}}},\ \sigma_{III} = \underline{\underline{-9\text{MPa}}}$

Suurin leikkausjännitys ja sitä vastaava normaalijännitys:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{18 - (-9)}{2} \approx \underline{\underline{13{,}5\text{MPa}}}\ ,\quad \sigma_\tau = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} = \frac{18 + (-9)}{2} \approx \underline{\underline{4{,}5\text{MPa}}}$$

2.

Suurimman pääjännityksen suuntainen yksikkövektori:

$([\sigma] - \sigma_I[I])\{n\} = \{0\}$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 11 - \sigma_I & 2 & 8 \\ 2 & 2 - \sigma_I & -10 \\ 8 & -10 & 5 - \sigma_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} -7 & 2 & 8 \\ 2 & -16 & -10 \\ 8 & -10 & -13 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ratkaistaan n_x ja n_y kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä:

$$\begin{aligned} -7n_x + 2n_y + 8n_z &= 0 \\ 2n_x - 16n_y - 10n_z &= 0 \end{aligned} \ \Leftrightarrow\ \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 2 & -16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -8 \\ 10 \end{Bmatrix} n_z$$

$\Rightarrow$

$$\begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 2 & -16 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -8 \\ 10 \end{Bmatrix} n_z = \frac{1}{(-7)\cdot(-16) - 2^2} \begin{bmatrix} -16 & -2 \\ -2 & -7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -8 \\ 10 \end{Bmatrix} n_z = \frac{1}{108} \begin{Bmatrix} 108 \\ -54 \end{Bmatrix} n_z = \begin{Bmatrix} n_z \\ -\frac{1}{2} n_z \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow\ n_x = n_z,\ n_y = -\frac{1}{2} n_z.$

Sijoitetaan ne ehtoon $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$, jolloin saadaan

$$n_z^2 + (-\frac{1}{2} n_z)^2 + n_z^2 = 1 \ \Rightarrow\ \frac{9}{4} n_z^2 = 1 \ \Rightarrow\ n_z = \frac{2}{3}$$

$$n_x = \frac{2}{3},\ n_y = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = -\frac{1}{3},\ n_z = \frac{2}{3}.$$

Tulos on

$$\underline{\underline{\mathbf{n} = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}).}}$$

3.

Jännityskomponentit:
$\sigma_x = 3xy \;\; \tau_{xy} = \tau_{yx} = 5y^2, \;\; \tau_{yz} = \tau_{zy} = 2z,$ muut $= 0$

Tasapainoyhtälöistä seuraa:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0 \;\Rightarrow\; f_x = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}, \text{ jne.}$$

Saadaan:

$$f_x = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = -3y - 10y - 0 = \underline{-13y}$$

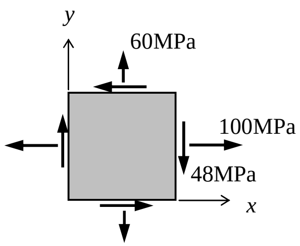
$$f_y = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -0 - 0 - 2 = \underline{-2}$$

$$f_z = -\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -0 - 0 - 0 = \underline{0}$$

Tilavuusvoimavektori:

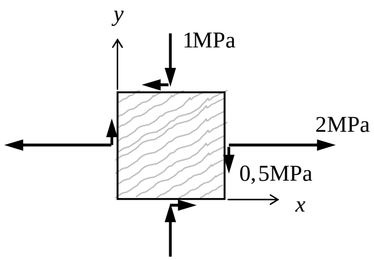
$$\mathbf{f} = f_i \mathbf{e}_i = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k} = \underline{\underline{-13y\mathbf{i} - 2\mathbf{j}}}.$$

1. Kappaleen tarkasteltavassa pisteessä vallitsee kuvan mukainen tasojännitystila. Määritä Mohrin ympyrän avulla ja analyyttisiä kaavoja käyttäen jännitystilan pääjännitykset ja niiden suuntakulmat sekä suurin ($x, y-$tason suuntainen) leikkausjännitys ja sitä vastaava normaalijännitys.
Vastaus: $\sigma_1 = 132\text{MPa}$, $\sigma_2 = 28\text{MPa}$, $\theta_1 \approx -33{,}7°$, $\theta_2 \approx 56{,}3°$,
$\tau_{\max}^{xy} = 52\text{MPa}$, $\sigma_{\tau}^{xy} = 80\text{MPa}$ ($x, y-$tasoa vastaan kohtisuoralla tasolla)



2. Tehtävässä 1 $x, y-$tasoa vastaan kohtisuoralla tasolla vaikuttava suurin leikkausjännitys $\tau_{xy}^{\max}$ ei ole tarkasteltavan pisteen suurin leikkausjännitys. Järjestä pisteen kolme pääjännitystä suuruusjärjestykseen. Määritä sitten jännitystilan suurin leikkausjännitys ja sitä vastaava normaalijännitys piirtämällä 3-dimensioisen jännitystilan Mohrin ympyrät. Selitä myös millä tasolla nämä vaikuttavat.
Osittainen vastaus: $\tau_{\max} = 66\text{MPa},\ \sigma_{\tau} = 66\text{MPa}$

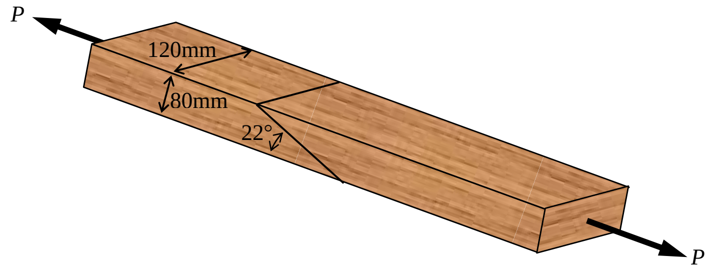
3. Puisen rakenneosan tietyssä pisteessä on kuvan mukainen tasojännitystila. Puun syyt muodostavat $30°$ kulman $x-$akselin kanssa. Sallittu leikkausjännitys syiden suunnassa on $\tau_{\text{sall}} = 1\text{MPa}$. Selvitä Mohrin ympyrän avulla ja analyyttisesti onko tämä jännitystila turvallinen. *Vastaus:* Ei.



Palautettavat kotitehtävät

Palautus **pe 12.10.2012 klo 16.00 mennessä** Nopassa olevien ohjeiden mukaisesti.

I. Kaksi puusauvaa, joiden poikkileikkaus on suorakaiteen muotoinen, on liitetty toisiinsa liimaamalla käyttäen kuvan mukaista vinoa liitosta. Kun tiedetään, että sallitut jännitykset liitoksessa ovat 400kPa vetoa (liitospintaa vastaan kohtisuorassa suunnassa) ja 600kPa leikkausta (liitospinnan suunnassa), määritä Mohrin ympyrää hyväksi käyttäen suurin mahdollinen aksiaalinen voima *P*, joka voi vaikuttaa. *Ohje:* Koordinaatistossa, jonka $x-$akseli on sauvan suuntainen ja $y-$akseli on ylös, vallitsee tasojännitystila, jonka jännityskomponentit ovat $\sigma_x = P/(bh),\ \sigma_y = 0,\ \tau_{xy} = 0,\ (b = 180\text{mm},\ h = 80\text{mm}).$
Vastaus: $P_{\max} = 16{,}58\text{kN}$.



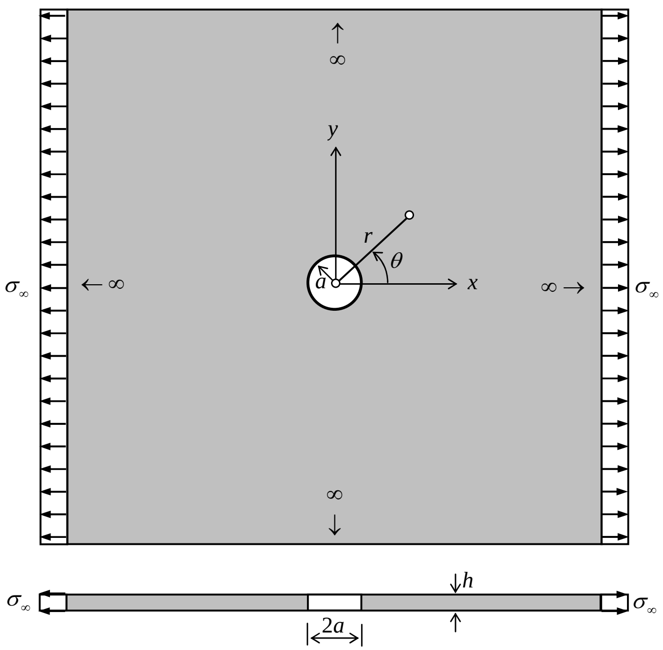
II. Tarkastellaan levyä, jossa on ympyrän muotoinen reikä ja johon vaikuttaa tasan jakautunut, vetävä kuorma $\sigma_{\infty} = \text{vakio}$ levyn päissä (kuva seuraavalla sivulla). Tiedetään että, jos levy on tehty lineaarisesti kimmoisesta aineesta, ja sen säde *a* on pieni levyn sivumittoihin nähden, käyttökelpoinen ratkaisu levyn jännityksille on

$$\sigma_r = \frac{\sigma_\infty}{2}(1-\frac{a^2}{r^2})[1+(1-3\frac{a^2}{r^2})\cos 2\theta],$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_\infty}{2}[1+\frac{a^2}{r^2}-(1+3\frac{a^4}{r^4})\cos 2\theta],$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_\infty}{2}(1-\frac{a^2}{r^2})(1+3\frac{a^2}{r^2})\sin 2\theta.$$

Ratkaisu perustuu olettamukseen, että levyn reunat ovat äärettömän etäällä reiästä. Määritä perustellen (a) sen pisteen asema, jossa normaalijännitys σ_θ saa suurimman arvonsa, ja tämä arvo, (b) itseisarvoltaan suurin leikkausjännitys $\tau_{r\theta}$. ja sen vaikutuspisteet (c) koko levyn suurin pääjännitys $\sigma_{\max}$ sekä (d) leikkausjännitys $\tau_{\max}$. (e) Piirrä normaalijännityksen σ_x jakaumat $x-$ ja $y-$akseleilla. *Huomautus:* Havaitaan, että maksimijännitys kasvaa reikää lähestyttäessä. Tätä ilmiötä kutsutaan **jännitysten keskittymiseksi**.
Osittainen vastaus: (a) $\sigma_{\theta,\max} = 3\sigma_\infty$, (b) $\left|\tau_{r\theta}\right|_{\max} = 2/3 \cdot \sigma_\infty$.



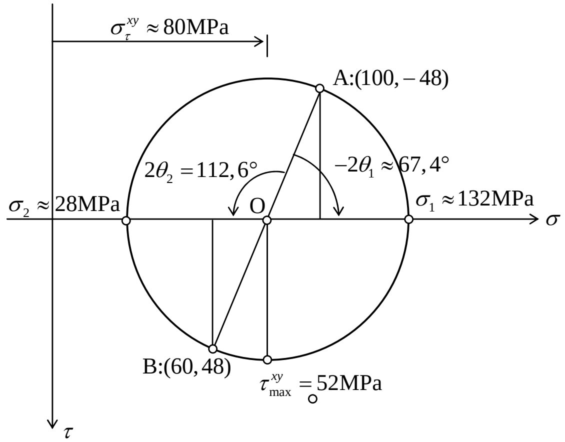
III. (a) Tarkastellaan ohutta levyä, jossa vallitsee tasojännitystila. Jos sylinterikoordinaatisto asetetaan siten, että sen z-akseli on kohtisuorassa levyn tasoa vastaan, voidaan levyä tarkastella napakoordinaatistossa r, θ. Tällöin ainoat nollasta eroavat jännityskomponentit tulevat olemaan σ_r, σ_θ ja $\tau_{r\theta} (= \tau_{\theta r})$ ja ne voidaan otaksua pelkästään r:n ja θ:n funktioiksi. Muodosta levyn jännityskomponenttien tasapainoyhtälöt napakoordinaatistossa lähtien yleisistä sylinterikoordinaatiston yhtälöistä.

(b) Tarkastellaan kolmidimensioista kappaletta, jonka on tietyn akselin suhteen pyörähdyssymmetrinen. Tällöin kappaleeseen voidaan asettaa sylinterikoordinaatisto, jonka $z-$akseli yhtyy pyörähdysakseliin. Tässä koordinaatistossa kappaleen geometria ja materiaaliominaisuudet eivät riipu koodinaatista θ. Jos myös kappaletta rasittava kuormitus on pyörähdyssymmetrinen (ts. riippumaton koordinaatista θ), tulevat sen nollasta eroavat jännityskomponentit olemaan σ_r, σ_θ, σ_z ja $\tau_{rz} = (\tau_{zr})$ ja ne ovat pelkästään r:n ja z:n funktiota. Muodosta kappaleen jännityskomponenttien tasapainoyhtälöt tässä r, z-koordinaatistossa lähtien yleisistä sylinterikoordinaatiston yhtälöistä.

1.

Jännityskomponentit: $\sigma_x = 100\text{MPa}, \sigma_y = 60\text{MPa}, \tau_{xy} = -48\text{MPa}$

Mohrin ympyrä:



Kuvion avulla saadaan:

$\sigma_1 \approx 132\text{MPa}$, $\sigma_2 \approx 28\text{MPa}$, $\theta_1 \approx -\dfrac{-67,4°}{2} = -33.7°$, $\theta_2 \approx \dfrac{112,6°}{2} = 56.3°$,

$\tau_{\max}^{xy} \approx 52\text{MPa}$, $\sigma_\tau^{xy} \approx 80\text{MPa}$ ($x, y-$tasoa vastaan kohtisuoralla tasolla)

Analyyttisesti:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{1}{2}(100+60) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(100-60)^2 + 4\cdot(48)^2} = 80 \pm 52$$

$\Rightarrow \sigma_1 = 132\text{MPa},\ \sigma_2 = 28\text{MPa}$

$$\theta_1 = \arctan\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} = \arctan\frac{132-100}{-48} = \underline{\underline{-33,69°}}$$

$$\theta_2 = \arctan\frac{\sigma_2 - \sigma_x}{\tau_{xy}} = \arctan\frac{28-100}{-48} = \underline{\underline{56,31°}}$$

Pääjännityksen suuruusjärjestyksessä ovat:

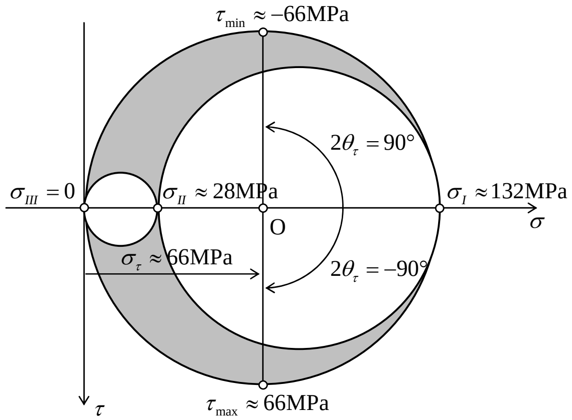
$\sigma_I = \sigma_1 = \underline{\underline{132\text{MPa}}},\ \ \sigma_{II} = \underline{\underline{28\text{MPa}}},\ \ \sigma_{III} = \sigma_z = \underline{\underline{0}}$

Suurin leikkausjännitys ja sitä vastaava normaalijännitys:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{132-0}{2} = \underline{\underline{66\text{MPa}}},\quad \sigma_\tau = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} = \frac{132+0}{2} = \underline{\underline{66\text{MPa}}},$$

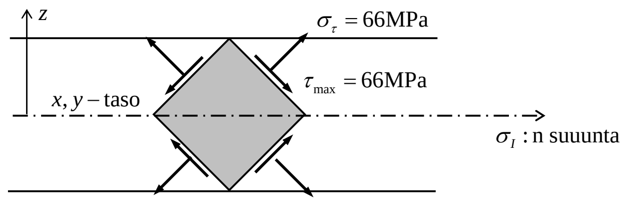
2.

Tasojännitystilassa on myös kolmas pääjännitys $\sigma_3 = \sigma_z = 0$, joten pääjännityksen suuruusjärjestyksessä ovat: $\sigma_I = \sigma_1 = \underline{\underline{132\text{MPa}}},\ \sigma_{II} = \sigma_2 = \underline{\underline{28\text{MPa}}},\ \sigma_{III} = \sigma_3 = \underline{\underline{0}}$
Suurin leikkausjännitys ja sitä vastaava normaalijännitys saadaan näiden avulla piirtämällä kaikki kolme Mohrin ympyrää seuraavasti:



Itseisarvoltaan suurin leikkausjännitys vaikuttaa pinnoilla, joiden normaalit muodostavat kulman $\theta_\tau = \pm 90°/2 = \pm 45°$ pääjännitysten σ_I ja σ_{III} suuntiin nähden.

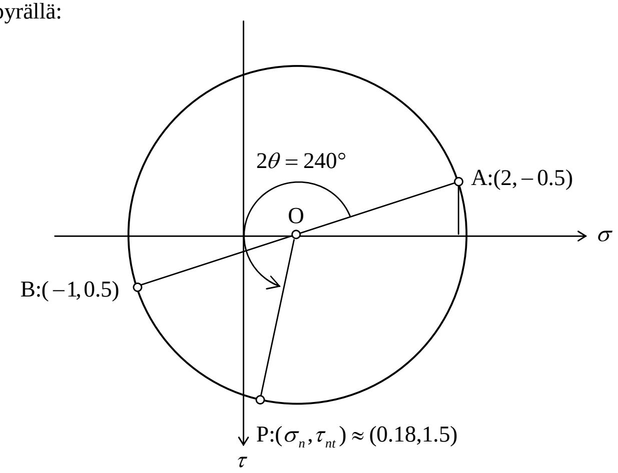
Oheisessa kuvassa on piirretty kappaleen (levy) leikkaus siten, että kuvastaso yhtyy σ_I :n suuntaan ja $z-$akselin suuntaan. Siinä on havainnollistettu kaikki neljä pintaa, joilla $\tau_{\max}$ esiintyy.



3.

Jännityskomponentit: $\sigma_x = 2\text{MPa}$, $\sigma_y = -1\text{MPa}$, $\tau_{xy} = -0.5\text{MPa}$.
Tarkastelupinnan normaalin ja $x-$akselin välinen kulma: $\theta = 90° + 30° = 120°$

Mohrin ympyrällä:



Leikkausjännitys on $\tau_{nt} \approx 1.5\text{MPa} > \tau_{\text{sall}} = 1\text{MPa}$, joten <u>jännitystila ei ole mahdollinen</u>.

Analyyttisesti:

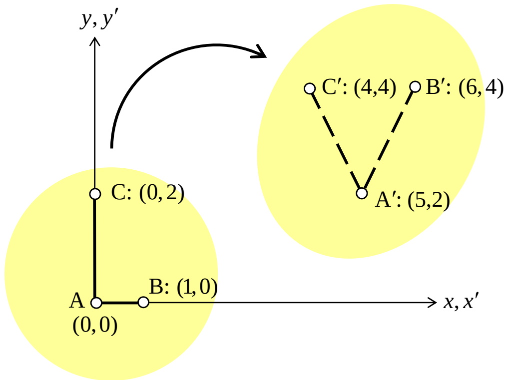
Leikkausjännitykselle saadaan kaavalla (265):

$$\tau_{nt} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta = -\frac{2-(-1)}{2}\sin(2\cdot 120°) - 0,5\cdot\cos(2\cdot 120°)$$
$$= 1,549\text{MPa} > \tau_{\text{sall}} = 1\text{MPa}$$

1. Kun ohut kalvo deformoituu, sen pintaan piirretty L-kirjain ABC muuttuu V-kirjaimeksi $A'B'C'$ kuvan mukaisesti. Kalvon deformaatio on homogeeninen, jolloin geometriakuvaus $x' = x'(x, y)$ ja $y' = y'(x, y)$ on lineaarinen. (a) Määritä siirtymät $u(x, y)$ ja $v(x, y)$.

   Ohje: Geometriakuvaus on $x'(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y$ ja $y'(x, y) = b_1 + b_2 x + b_3 y$, jossa kertoimet a_1, a_2 a_3, b_1, b_2 ja b_3 määräytyvät ehdoista pisteissä A, B ja C.

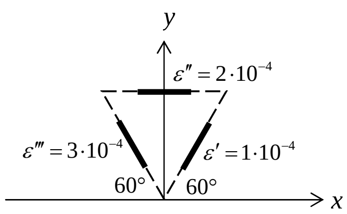
   Vastaus: $u = u = 5 - 0,5y$, $v = 2 + 2x$.



2. Määritä tehtävän 1 siirtymätilaa vastaavat (a) Lagrangen venymät ε_x, ε_y ja liukuma γ_{xy} sekä vastaava 2×2 muodonmuutosmatriisi. (b) Määritä myös päävenymät ja niiden suuntakulmat sekä suurin liukuma levyn tasossa.

   Osittainen vastaus: (a) $\varepsilon_x = 2$, $\gamma_{xy} = 1,5$, (b) $\varepsilon_1 \approx 2,26$, $\theta_1 \approx 19,3°$

3. Venymämittausruusuke, muodostuu kolmesta venymäliuskasta, jotka on kiinnitetty kappaleen pintaan kuvan mukaisesti. Venymäliuskojen venymille ε', ε'' ja ε''' on mitattu kuvan mukaiset arvot. (a) Määritä venymäkomponentit kappaleen pinnalla ja venymämatriisi. (b) Määritä myös Mohrin ympyrän avulla päävenymät ja niiden suunnat sekä suurin liukuma pinnalla.



   Osittainen vastaus:

   (a) $\varepsilon_y = 2 \cdot 10^{-4}$, $\gamma_{xy} = -2,31 \cdot 10^{-4}$ (b) $\varepsilon_1 \approx 3,15 \cdot 10^{-4}$, $\theta_1 \approx -45°$, $\gamma_{\max} \approx 2,3 \cdot 10^{-4}$

Palautettavat kotitehtävät

Palautus **pe 19.10 klo 16.00 mennessä** Nopassa olevien ohjeiden mukaisesti.

I. Selitä sanallisesti, lyhyesti ja mahdollisimman täsmällisesti seuraavat käsitteet: (a) Partikkelin siirtymävektori ja siirtymävektorin komponentit. (b) Janan pituudenmuutos, insinöörivenymä, todellinen venymä ja Lagrangen venymä. (c) Suorakaiteen liukumiskulma. (d) Kiinteän kappaleen venymä, liukumiskulma ja liukuma tietyssä pisteessä. (e) Kiinteän kappaleen venymäkomponentit, liukumakomponentit ja muodonmuutoskomponentit.

   (f) Sauvan pituus alkutilassa on 1m ja lopputilassa 2m ja 1,01m. Määritä insinöörivenymä ja Lagrangen venymä kummassakin tapauksessa.

II. Päävenymien määrittäminen tasotapauksessa voidaan ilmaista ominaisarvo-tehtävänä

$$([\varepsilon] - \varepsilon[I])\{n\} = \{0\},$$

missä

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \dfrac{\gamma_{xy}}{2} \\ \dfrac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y \end{bmatrix}, \quad [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \{n\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix}$$

ja $n_x^2 + n_y^2 = 1$. Johda tämän tiedon perusteella päävenymille ja pääsuunnille seuraavat kaavat

$$\left.\begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}, \quad \theta_i = \arctan\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_x}{\gamma_{xy}/2}, \ (i = 1, 2).$$

III. (a) Kappaleen siirtymäkenttä on annettu lausekkeilla $u = kxy$, $v = kxy$ ja $w = 2k(x + y)z$, missä vakio $k(> 0)$ on niin pieni, että infinitesimaalisten muodonmuutosten teoria on voimassa. Määritä infinitesimaaliset muodonmuutoskomponentit funktioina koordinaateista x, y ja z ja muodosta muodonmuutosmatriisi. Määritä pisteessä (1,1,0) päävenymät, suurimman päävenymän suuntainen yksikkövektori ja suurin liukuma.

   (b) Mikä ehto tulee olla voimassa vakioiden α ja β välillä, jotta infinitesimaaliset venymäkomponentit

$$\varepsilon_x = \alpha z(x^2 + y^2), \ \varepsilon_y = \alpha x^2 z, \ \gamma_{xy} = 2\beta xyz, \ \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \varepsilon_z = 0$$

   ovat mahdollisia.

1.

Esitetään lineaariset lausekkeet $x' = x'(x,y)$ ja $y' = y'(x,y)$ muodossa

$$x' = a_1 + a_2 x + a_3 y,$$

$$y' = b_1 + b_2 x + b_3 y,$$

jolloin kuvion perusteella saadaan

$$\left.\begin{array}{l} x'(0,0) = a_1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = 5 \\ x'(1,0) = a_1 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 0 = 6 \\ x'(0,2) = a_1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 5 \\ a_1 + a_2 = 6 \\ a_1 + 2a_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 5 \\ a_2 = 1 \\ a_3 = -0,5 \end{cases}$$

ja

$$\left.\begin{array}{l} y'(0,0) = b_1 + b_2 \cdot 0 + b_3 \cdot 0 = 2 \\ y'(1,0) = b_1 + b_2 \cdot 1 + b_3 \cdot 0 = 4 \\ y'(0,2) = b_1 + b_2 \cdot 0 + b_3 \cdot 2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 2 \\ b_1 + b_2 = 4 \\ b_1 + 2b_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 2 \\ b_2 = 2 \\ b_3 = 1 \end{cases}$$

ja lausekkeiksi $x' = x'(x,y)$ ja $y' = y'(x,y)$ saadaan

$$x' = 5 + x - 0,5y,$$

$$y' = 2 + 2x + y.$$

Siirtymille saadaan

$$u = x' - x = \underline{\underline{5 - 0,5y}},$$

$$v = y' - y = \underline{\underline{2 + 2x}}.$$

2.

(a)
Siirtymien osittaisderivaatoille saadaan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -0,5,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Venymille saadaan

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}[(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x})^2] = 0 + \frac{1}{2}(0 + 2^2) = \underline{\underline{2}}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}[(\frac{\partial u}{\partial y})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2] = 0 + \frac{1}{2}[(-0,5)^2 + 0^2] = \underline{\underline{0,125}}$$

Liukumalle saadaan

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = -0,5 + 2 + 0 \cdot (-1.5) + 2 \cdot 0 = \underline{\underline{1,5}}$$

Muodonmuutosmatriisi on

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 0,75 \\ 0,75 & 0,125 \end{bmatrix}}}$$

(b)
Päävenymät:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} = \frac{1}{2}(2 + 0,125) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(2 - 0,125)^2 + 1,5^2}$$

$$= 1,0625 \pm 1,2006$$

$$\varepsilon_1 = 2,2631 \approx \underline{\underline{2,26}}, \quad \varepsilon_2 = -0,1381 \approx \underline{\underline{-0,14}}$$

Pääsuunnat:

$$\theta_1 = \arctan\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_x}{\gamma_{xy}/2} = \arctan\frac{2,2631 - 2}{1,5/2} \approx \underline{\underline{19,3°}}$$

$$\theta_2 = \arctan\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_x}{\gamma_{xy}/2} = \arctan\frac{-0,1381 - 2}{1,5/2} \approx \underline{\underline{-70,7°}}$$

Suurin liukuma:

$$\gamma_{\max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \approx 2,2631 - (-0,1381) = \underline{\underline{2,401}}$$

3.

Kaavoja (3.75)

$$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

käyttäen saadaan yhtälöt

$$\varepsilon_{60°} \equiv \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\overbrace{\cos(2\cdot 60°)}^{-1/2} + \frac{\gamma_{xy}}{2}\overbrace{\sin(2\cdot 60°)}^{\sqrt{3}/2} = \varepsilon'$$

$$\varepsilon_{0°} \equiv \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\overbrace{\cos(2\cdot 0)}^{1} + \frac{\gamma_{xy}}{2}\overbrace{\sin(2\cdot 0)}^{0} = \varepsilon''$$

$$\varepsilon_{-60°} \equiv \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\overbrace{\cos(2\cdot -60°)}^{-1/2} + \frac{\gamma_{xy}}{2}\overbrace{\sin(2\cdot -60°)}^{-\sqrt{3}/2} = \varepsilon'''$$

ja edelleen

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}\varepsilon_x + \frac{3}{4}\varepsilon_y + \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} = \varepsilon' \\ \varepsilon_x = \varepsilon'' \\ \frac{1}{4}\varepsilon_x + \frac{3}{4}\varepsilon_y - \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} = \varepsilon''' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x + 3\varepsilon_y + \sqrt{3}\gamma_{xy} = 4\varepsilon' \\ \varepsilon_x = \varepsilon'' \\ \varepsilon_x + 3\varepsilon_y - \sqrt{3}\gamma_{xy} = 4\varepsilon''' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon'' = 2\cdot 10^{-4} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}(\varepsilon' - \varepsilon''') = -\dfrac{4}{\sqrt{3}}\cdot 10^{-4} \approx -2{,}31\cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{3}(-\varepsilon_x + \sqrt{3}\gamma_{xy} + 4\varepsilon''') = \dfrac{1}{3}(-\varepsilon'' + 2\varepsilon' + 2\varepsilon''') = \dfrac{1}{3}(-2+2+6) = 2\cdot 10^{-4} \end{cases}$$

Venymämatriisi:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 2 & -\dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ -\dfrac{2}{\sqrt{3}} & 2 \end{bmatrix}\cdot 10^{-4}$$

Huomautus: Jos kaavaa (3.75) ei ole käytettävissä voidaan käyttää kaavaa (3.44)

$$\varepsilon_n = \{n\}^T[\varepsilon]\{n\},$$

joka on helppo muistaa. Merkitään venymän suunnan **n** ja x – akselin välistä kulmaa θ, jolloin $n_x = \cos\theta$ ja $n_y = \sin\theta$, jolloin

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix}, \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \dfrac{\gamma_{xy}}{2} \\ \dfrac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y \end{bmatrix}$$

Venymälle suuntaan θ saadaan nyt lauseke

$$\varepsilon_\theta \equiv \varepsilon_n = \{n\}^T[\varepsilon]\{n\} = [\cos\theta, \sin\theta]\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \dfrac{\gamma_{xy}}{2} \\ \dfrac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix}$$

$$= [\cos\theta, \sin\theta]\begin{Bmatrix} \varepsilon_x\cos\theta + \dfrac{\gamma_{xy}}{2}\sin\theta \\ \dfrac{\gamma_{xy}}{2}\cos\theta + \varepsilon_y\sin\theta \end{Bmatrix} = \varepsilon_x\cos^2\theta + \varepsilon_y\sin^2\theta + \gamma_{xy}\sin\theta\cos\theta.$$

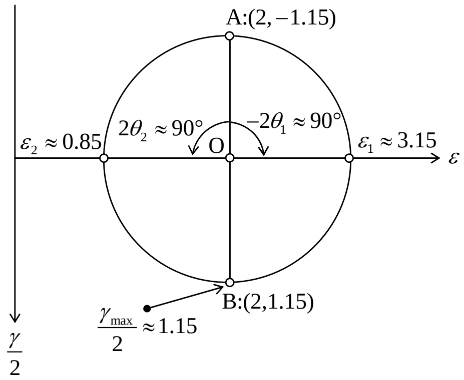
Sitä käyttäen saadaan yhtälöt

$$\begin{cases} \varepsilon_{60^\circ} \equiv \varepsilon_x\cos^2 60^\circ + \varepsilon_y\sin^2 60^\circ + \gamma_{xy}\sin 60^\circ\cos 60^\circ = \varepsilon' \\ \varepsilon_{0^\circ} \equiv \varepsilon_x\cos^2 0^\circ + \varepsilon_y\sin^2 0^\circ + \gamma_{xy}\sin 0^\circ\cos 0^\circ = \varepsilon'' \\ \varepsilon_{-60^\circ} \equiv \varepsilon_x\cos^2(-60^\circ) + \varepsilon_y\sin^2(-60^\circ) + \gamma_{xy}\sin(-60^\circ)\cos(-60^\circ) = \varepsilon''' \end{cases}$$

josta seuraa edellä saatu tulos.

Päävenymät, suuntakulmat ja suurin liukuma:

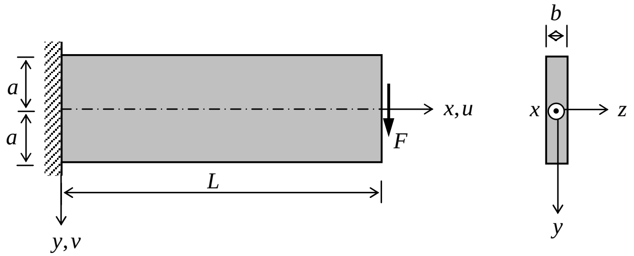
Kerroin kuvassa 10^{-4}



Kuvasta saadaan tulokset:

$\varepsilon_1 \approx \underline{\underline{3.15\cdot 10^{-4}}}$, $\varepsilon_2 \approx \underline{\underline{0.85\cdot 10^{-4}}}$, $\theta_1 \approx -90°/2 = \underline{\underline{-45°}}$ $\theta_2 \approx 90°/2 = \underline{\underline{45°}}$,

$\gamma_{max} \approx 2\cdot 1{,}15\cdot 10^{-4} = \underline{\underline{2{,}3\cdot 10^{-4}}}$



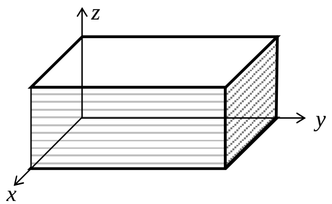
1. Oheinen suorakaiteen muotoinen, lineaarisesti kimmoinen levy on tasojännitystilassa. Se on kiinnitetty vasemmasta päästään jäykkään tukeen ja sen oikeassa päässä vaikuttaa kuormitus, jonka resultantti on *F*. Sen siirtymäkenttä on

$$u(x,y)=\frac{F}{4Ea^3b}[(2+\nu)y(a^2-y^2)-3(2Lx-x^2)y],$$

$$v(x,y)=\frac{F}{4Ea^3b}[3\nu(L-x)y^2+3Lx^2-x^3+(4+5\nu)a^2x],$$

missä E kimmomoduuli ja ν on Poissonin vakio. (a) Piirrä levyn akselin pystysuuntainen siirtymä $v(x,0)$ ja piirrä sen dimensioton arvo $v(x,0)Eb/F$ dimensiottoman koordinaatin x/a funktiona, kun $L=6a$ ja $\nu=0,3$. (b) Määritä levyn jännityskomponentit. (c) Osoita, että ne toteuttavat tasojännitystilan tasapainoyhtälöt, joissa tilavuusvoimia ei ole. (d) Piirrä dimensioton normaalijännitys $\sigma_x(0,y)ab/F$ ja leikkausjännitys $\tau_{xy}(0,y)ab/F$ tuella dimensiottoman koordinaatin y/a funktiona. (e) Määritä traktiokomponentit levyn oikeassa päässä ts. $t_x^{(i)}(y)$ ja $t_y^{(i)}(y)$. (f) Osoita, että voima F on traktion $t_y^{(i)}(y)$ resultantti. *Osittainen vastaus:*

(a) $\sigma_x=-\dfrac{3F}{2a^3b}(L-x)y$ (e) $t_y^{(i)}=\dfrac{3F}{4a^3b}(a^2-y^2)$



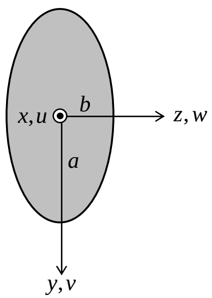
2. Niin sanottua transversaali-isotrooppista, lineaarisesti kimmoista materiaalimallia voidaan joissain tilanteissa käyttää kuvaamaan esimerkiksi vanerin tai maan jännitys-muodonmuutoskäyttäytymistä. Kysymyksessä on ortotrooppinen aine, joka on $x,y-$tason suunnassa isotrooppinen. Tämä merkitsee sitä, että aineen $x-$ ja $y-$suuntiin liittyvät materiaalivakiot ovat samat. Määritä tällaisen materiaalin muodonmuutos-jännitys yhteys ja tutki riippumattomien kimmovakioiden määrää. *Osittainen vastaus:* Riippumattomia kimmovakioita 5kpl.

Harjoitus 5 Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi

3. Maamekaniikan tarkasteluissa käytetään usein muodonmuutostilaa, jossa siirtymisen ajatellaan tapahtuvan vain pystysuunnassa. Jos $x,y,z-$koordinaatiston $z-$akseli on pystysuora, tämä merkitsee sitä, että siirtymäkomponentit u ja v häviävät. Niin sanotulla lepopainekerroin K_0 määritellään kertoimena, jonka avulla maan vaakasuuntaiset normaalijännitykset σ_x ja σ_y saadaan pystysuuntaisen normaalijännityksen σ_z avulla lausekkeesta $\sigma_x=\sigma_y=K_0\sigma_z$. Lausu lepopainekerroin kimmovakioiden avulla, kun (a) maa otaksutaan isotrooppiseksi lineaarisesti kimmoiseksi aineeksi ja (b) transversaali-isotrooppiseksi lineaarisesti kimmoiseksi aineeksi.
Vastaus:
(a) $K_0=\lambda/(2G+\lambda)=\nu/(1+\nu)$, (b) $K_0=\nu_{13}/(1+\nu_1)$, missä $\nu_1=\nu_{12}=\nu_{21}$

Palautettavat kotitehtävät

Palautus **pe 2.11 klo 16.00 mennessä** Nopassa olevien ohjeiden mukaisesti.

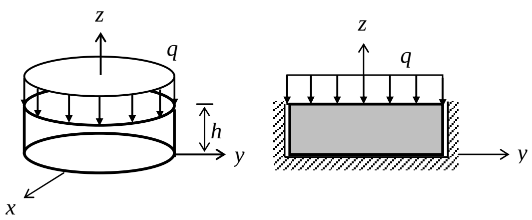


I. Terässauvan, jonka poikkileikkaus on ellipsin muotoinen, siirtymille on saatu lausekkeet

$$u=-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\theta yz,\ v=-\theta xz,\ w=\theta xy,$$

missä θ on ns. vääntymä eli vääntökulma sauvan pituutta kohti. Määritä (a) sauvan muodonmuutokset ja jännitykset sekä osoita, että jännityskomponenttien tasapainoehdot toteutuvat. (b) Määritä sauvan suurin leikkausjännitys ja piste, jossa se vaikuttaa, jos $a\ge b$.

II. Maakerrosten painuma-analyysin yhteydessä käytetään ns. ödometrikoetta. Siinä sylinterimäisessä rasiassa olevaa näytettä kuormitetaan sylinterin akselin (*z*-akseli) suunnassa. Näyte deformoituu siten, että pelkästään *z*-akselin suuntainen liike on mahdollinen. Likitarkastelussa rasian ja näytteen välinen kitka sekä näytteen oma paino voidaan jättää huomiotta. Näytteen siirtymätila on siis: $u=v=0,\ w=w(z)$.



(a) Osoita käyttäen muodonmuutosten ja siirtymien välisiä yhteyksiä, että venymä ε_z on ainoa nollasta eroava muodonmuutoskomponentti ja sillä on lauseke $\varepsilon_z = w'(z)$. (b) Otaksutaan, että maanäyte on isotrooppista ja lineaarisesti kimmoista materiaalia. Osoita lähtien Hooken laista, että tässä tapauksessa maanäytteen venymän ε_z ja vastaavan normaalijännityksen σ_z välinen yhteys voidaan kirjoittaan muotoon

$$\varepsilon_z = \frac{1-\nu-2\nu^2}{(1-\nu)E}\sigma_z$$

ja maanäytteen muille normaalijännityksille saadaan lauseke

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z$$

(c) Sylinterimäisen näytteen ympyrän muotoista yläpintaa kuormittaa pintayksikköä kohti tasan jakautunut kuormitus q. Katkaistun sylinterin yläosan tasapaino-tarkastelulla, nähdään helposti, että maanäytteen normaalijännityksellä σ_z on tässä tapauksessa arvo $\sigma_z = -q$. Käyttäen tätä tulosta sekä tietoa, että näytteen venymä ε_z on sen suhteellinen korkeuden muutos, ts. $\varepsilon_z = \Delta h / h$, muodosta lauseke näytteen kuormituksesta q aiheutuvalle korkeuden muutokselle Δh.

III. Tarkastallaan putkea, jonka sisäsäde on a ja ulkosäde on b. Sen materiaali on lineaarisesti kimmoista, kimmomoduuli on E ja Poissonin vakio on ν. Putken sisällä vaikuttaa vakio paine p, mutta muuten se on kuormittamaton. Putki on tuettu siten, että sen pitenemistä pitkittäissuunnassa ei ole rajoitettu, joten sen voidaan olettaa olevan tasojännitystilassa ja tarkastelu rajoittaa poikkileikkaustasoon. On tarkoituksen mukaista tarkastella putkea sylinteri-koordinaatistossa, jonka $z-$akseli yhtyy putken akseliin. Putken ja kuormituksen symmetrian vuoksi säteen suuntainen siirtymä u_r on pelkästään r:n funktio ja tangentin suuntainen siirtymä u_θ häviää. (a) Lausu ensin käyttäen muodonmuutosten ja siirtymien yhteyksiä venymät ε_r, ε_θ ja liukuma $\gamma_{r\theta}$ siirtymän u_r avulla. (b) Lausu toiseksi käyttäen tasojännitystilan jännitysten ja muodonmuutosten yhteyksiä[1] jännitykset σ_r, σ_θ ja $\tau_{r\theta}$ siirtymän avulla. (c) Sijoittamalla nämä ensimmäiseen jännityskomponenttien tasapainoyhtälöön, jolloin saat siirtymälle $u_r(r)$ differentiaaliyhtälön ja saata tämä yhtälö muotoon

[1] Jännitysten ja muodonmuutosten yhteydet sylinterikoordinaatistossa ovat samanlaiset kuin karteesisessa koordinaatistossa. Ne saadaan siis jälkimmäisistä suorittamalla alaindekseille sijoitukset: $x \to r,\ y \to \theta,\ z \to z$.

Harjoitus 5 Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d(ru_r)}{dr}\right] = 0.$$

(d) Osoita, että tämän differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on

$$u_r(r) = \frac{C_1}{2}r + \frac{C_2}{r}.$$

(e) Reunaehdot putken sisä- ja ulkopinnalla ovat

$$\sigma_r(a) = p,\ \sigma_r(b) = 0.$$

Määritä reunaehtojen avulla integrointivakioiden C_1 ja C_2 arvot ja osoita, että levyn siirtymällä u_r ja jännityksillä σ_r ja σ_θ on lausekkeet

$$u_r = \frac{p}{E}\frac{a^2 b}{b^2-a^2}\left[(1-\nu)\frac{r}{b} + (1+\nu)\frac{b}{r}\right],$$

$$\sigma_r = \frac{pa^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right), \quad \sigma_\theta = \frac{pa^2}{b^2-a^2}\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right).$$

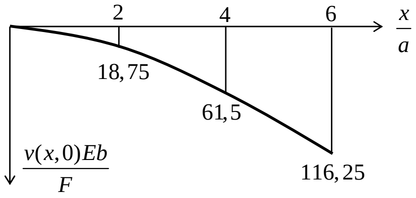
(f) Piirrä lopuksi tapauksessa, jossa $b = 3a$ ja $\nu = 0,3$, levyn dimensioton siirtymä $Eu_r/(pa)$ sekä dimensiottomat jännitykset σ_r/p ja σ_θ/p suhteen r/a funktiona.

1.

(a) Palkin akselin pystysuuntaiselle siirtymälle saadaan:

$$v(x,0)=\frac{F}{4Ea^3b}[3\cdot 6a\cdot x^2-x^3+(4+5\cdot 0,3)a^2x]$$

$$\Rightarrow\ \frac{v(x,0)Eb}{F}=\frac{1}{4}[18(\frac{x}{a})^2-(\frac{x}{a})^3+5,5\frac{x}{a}]$$



(b) Venymäkomponentit:

$$\varepsilon_x\equiv\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{F}{4Ea^3b}[-3(2L-2x)y]=-\frac{3F}{2Ea^3b}(L-x)y,$$

$$\varepsilon_y\equiv\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{F}{4Ea^3b}6\nu(L-x)y=\frac{3F\nu}{2Ea^3b}(L-x)y,$$

$$\gamma_{xy}\equiv\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{F}{4Ea^3b}[(2+\nu)(a^2-y^2)-2(2+\nu)y^2-3(2Lx-x^2)]$$

$$+\frac{F}{4Ea^3b}[-3\nu y^2+6Lx-3x^2+(4+5\nu)a^2]$$

$$=\frac{6F}{4Ea^3b}(1+\nu)(a^2-y^2)$$

Jännitysten ja muodonmuutosten väliset yhteydet:

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y-\nu\overbrace{\sigma_z}^{0}),\ \ \varepsilon_y=\frac{1}{E}(\sigma_y-\nu\overbrace{\sigma_z}^{0}-\nu\sigma_x),\ \ \gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases}\sigma_x-\nu\sigma_y=E\varepsilon_x\\ \sigma_y-\nu\sigma_x=E\varepsilon_y\,|\cdot\nu\end{cases}\ \Rightarrow\ (1-\nu^2)\sigma_x=E(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y)\ \Rightarrow\ \sigma_x=\underline{\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y)}$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases}\sigma_x-\nu\sigma_y=E\varepsilon_x\,|\cdot\nu\\ \sigma_y-\nu\sigma_x=E\varepsilon_y\end{cases}\ \Rightarrow\ (1-\nu^2)\sigma_y=E(\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x)\ \Rightarrow\ \sigma_y=\underline{\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x)}$$

$$\Rightarrow\ \ \tau_{xy}=\underline{G\gamma_{xy}}$$

Jännityskomponentit:

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\nu^2}[-\frac{3F}{2Ea^3b}(L-x)y+\nu\frac{3F\nu}{2Ea^3b}(L-x)y]=\underline{\underline{-\frac{3F}{2a^3b}(L-x)y}}$$

$$\sigma_y=\frac{E}{1-\nu^2}[\frac{3F\nu}{2Ea^3b}(L-x)y-\nu\cdot\frac{3F}{2Ea^3b}(L-x)y]=\underline{\underline{0}}$$

$$\tau_{xy}=G\gamma_{xy}=\frac{E}{2(1+\nu)}\cdot\frac{6F}{4Ea^3b}(1+\nu)(a^2-y^2)=\underline{\underline{\frac{3F}{4a^3b}(a^2-y^2)}}$$

(c) Derivoidaan

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}=\frac{3F}{2a^3b}y,\ \ \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0,\ \ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}=0,\ \ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=-\frac{3F}{2a^3b}y$$

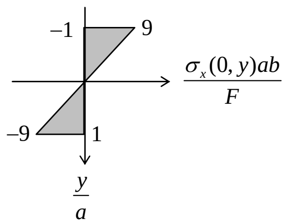
Sijoitetaan tasotapauksen tasapainoyhtälöiden vasempiin puoliin

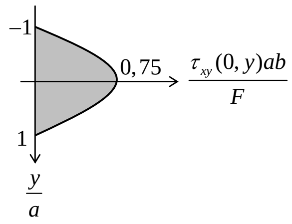
$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=\frac{3F}{2a^3b}y-\frac{3F}{2a^3b}y=0\ \ \text{OK},\ \ \ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0+0=0\ \ \text{OK}.$$

(iv)

$$\sigma_x(0,y)=-\frac{3F}{2a^3b}6ay\ \Rightarrow\ \frac{\sigma_x(0,y)ab}{F}=-9\frac{y}{a}$$

$$\tau_{xy}(0,y)=\frac{3F}{4a^3b}(a^2-y^2)\ \Rightarrow\ \frac{\tau_{xy}(0,y)ab}{F}=\frac{3}{4}[1-(\frac{y}{a})^2]$$





(d)

$$\{t\}^{(n)}=[\sigma]\{n\}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}t_x^{(n)}=n_x\sigma_x+n_y\tau_{xy}\\ t_y^{(n)}=n_x\tau_{xy}+n_y\sigma_y\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}t_x^{(i)}=\overbrace{n_x}^{1}\sigma_x+\overbrace{n_y}^{0}\tau_{xy}=\sigma_x\\ t_y^{(i)}=\overbrace{n_x}^{1}\tau_{xy}+\overbrace{n_y}^{0}\sigma_y=\tau_{xy}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases}t_x^{(i)}(y)=\sigma_x(L,y)=\underline{\underline{0}}\\ t_y^{(i)}(y)=\tau_{xy}(L,y)=\underline{\underline{\frac{3F}{4a^3b}(a^2-y^2)}}\end{cases}$$

(e)

$$\int_{-a}^{a}t_y^{(i)}(y)bdy=\int_{-a}^{a}t_y^{(i)}(y)bdt=\int_{-a}^{a}\frac{3F}{4a^3b}(a^2-y^2)bdy=\frac{3F}{4a^3}\int_{-a}^{a}(a^2-y^2)dy=\frac{3F}{4a^3}\Big|_{-a}^{a}(a^2y-\frac{y^3}{3})$$

$$=\frac{3F}{4a^3}(a^3-\frac{a^3}{3}+a^3-\frac{a^3}{3})=\frac{3F}{4a^3}\frac{4a^3}{3}=F,\ \text{OK}.$$

2.

Ortotrooppisen aineen muodonmuutos-jännitys matriisi on

$$[C]=\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} \end{bmatrix}$$

Kimmovakioita on 12: E_1, E_2, E_3, ν_{12}, ν_{21}, ν_{23}, ν_{32}, ν_{31}, ν_{13}, G_{12}, G_{23} ja G_{31}, ja niitä sitoo 3 symmetriasta johtuvaan yhteyttä

$$\frac{\nu_{12}}{E_1}=\frac{\nu_{21}}{E_2},\quad \frac{\nu_{23}}{E_2}=\frac{\nu_{32}}{E_3},\quad \frac{\nu_{31}}{E_3}=\frac{\nu_{13}}{E_1}.$$

Koska transversaali-isotroopisessa aineessa suunnat 1 ja 2 ovat samanarvoiset, merkitään $E_2=E_1$, $\nu_{21}=\nu_{12}=\nu_1$, $\nu_{23}=\nu_{13}$, $\nu_{32}=\nu_{31}$, $G_{23}=G_{31}$, jolloin muodon-muutos-jännitys matriisille saadaan

$$[C]=\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_1}{E_1} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_1}{E_1} & \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} \end{bmatrix}$$

Kimmovakioita on nyt 7 kpl: E_1, E_3, ν_1, ν_{31}, ν_{13}, G_1 ja G_{31}. Niitä sitoo matriisin symmetriasta johtuva ehto

Harjoitus 5 Rak-54.1200 Rakenteiden lujuusoppi
Ratkaisut

$$\frac{\nu_{13}}{E_1}=\frac{\nu_{31}}{E_3}.$$

Isotrooppisuus $x,y-$tasossa edellyttää vielä, että kimmovakioilla E_1, ν_1 ja G_1 on yhteys

$$G_1=\frac{E_1}{2(1+\nu_1)}.$$

Näin riippumattomia kimmovakioita tehtävässä on $7-2=5\text{kpl}$.

3.

Venymille saadaan:

$$\varepsilon_x=\frac{\partial \overbrace{u}^{0}}{\partial x}=0,\ \varepsilon_y=\frac{\partial \overbrace{v}^{0}}{\partial y}=0,\ \varepsilon_x=\frac{\partial w}{\partial z}\neq 0$$

(a)
Isotrooppisen, lineaarisesti kimmoisen aineen jännitys-muodonmuutos yhteyksistä seuraa:

$$\sigma_x=(2G+\lambda)\overbrace{\varepsilon_x}^{0}+\lambda\overbrace{\varepsilon_y}^{0}+\lambda\varepsilon_z=\lambda\varepsilon_z,$$

$$\sigma_y=(2G+\lambda)\overbrace{\varepsilon_y}^{0}+\lambda\varepsilon_z+\lambda\overbrace{\varepsilon_x}^{0}=\lambda)\varepsilon_z,$$

$$\sigma_z=(2G+\lambda)\varepsilon_z+\lambda\overbrace{\varepsilon_x}^{0}+\lambda\overbrace{\varepsilon_y}^{0}=(2G+\lambda)\varepsilon_z.$$

Ratkaisemalla viimeisestä ε_z, saadaan

$$\varepsilon_z=\frac{\sigma_z}{2G+\lambda}$$

ja sijoittamalla se kahteen edelliseen saadaan

$$\sigma_x=\sigma_y=\frac{\lambda}{2G+\lambda}\sigma_z.$$

Vertaamalla tätä määrittelykaavaan $\sigma_x=\sigma_y=K_0\sigma_z$ saadaan

$$\underline{\underline{K_0=\frac{\lambda}{2G+\lambda}}}.$$

Lausumalla Lamen parametri leikkausmoduulin ja Poissonin vakion avulla saadaan tästä

$$K_0=\frac{\frac{2G\nu}{1-2\nu}}{2G+\frac{2G\nu}{1-2\nu}}=\frac{2G\nu}{2G(1-2\nu)+2G\nu}=\underline{\underline{\frac{\nu}{1-\nu}}}$$

Vaihtoehtoisesti voidaan lähteä liikkeelle muodonmuutos-jännitysyhteyksistä, jolloin saadaan

$$\left.\begin{aligned}\overbrace{\varepsilon_x}^{0} &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) \\ \overbrace{\varepsilon_y}^{0} &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_z - \nu\sigma_x)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\sigma_x - \nu\sigma_y = \nu\sigma_z \\ -\nu\sigma_x + \sigma_y = \nu\sigma_z \;|\cdot\nu\end{cases} \Rightarrow (1-\nu^2)\sigma_x = (\nu+\nu^2)\sigma_z$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu^2}\sigma_z = \underline{\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z}, \quad \sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z) = \nu(\frac{\nu}{1-\nu}+1)\sigma_z = \underline{\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z}$$

Näin

$$K_0 = \underline{\underline{\frac{\nu}{1-\nu}}}$$

(b)

Transversaali-isotrooppisen, lineaarisesti kimmoisen aineen muodonmuutos-jännitys-yhteyksistä seuraa:

$$\left.\begin{aligned}\overbrace{\varepsilon_x}^{0} &= \frac{1}{E_1}\sigma_x - \frac{\nu_1}{E_1}\sigma_y - \frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_z \\ \overbrace{\varepsilon_y}^{0} &= -\frac{\nu}{E_1}\sigma_x + \frac{1}{E_1}\sigma_y - \frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_z\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\sigma_x - \nu_1\sigma_y = \nu_{31}\frac{E_1}{E_3}\sigma_z \\ -\nu_1\sigma_x + \sigma_y = \nu_{31}\frac{E_1}{E_3}\sigma_z \;|\cdot\nu_1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sigma_x - \nu_1\sigma_y = \nu_{13}\sigma_z \\ -\nu_1\sigma_x + \sigma_y = \nu_{13}\sigma_z \;|\cdot\nu_1\end{cases}$$

$$\Rightarrow (1-\nu_1^2)\sigma_x = \nu_{13}(1+\nu_1)\sigma_z \Rightarrow \sigma_x = \underline{\frac{\nu_{13}}{1-\nu_1}\sigma_z},$$

$$\sigma_y = \nu_1\sigma_x + \nu_{13}\sigma_z = (\nu_1\frac{\nu_{13}}{1-\nu_1} + \nu_{13})\sigma_z = \underline{\frac{\nu_{13}}{1-\nu_1}\sigma_z}$$

Näin

$$K_0 = \underline{\underline{\frac{\nu_{13}}{1-\nu_1}}}$$