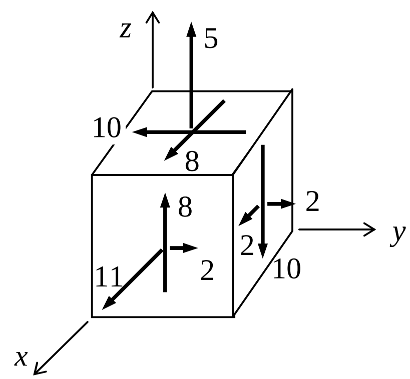
Rak-54.1200 RAKENTEIDEN LUJUUSOPPI

Osa I: Kiinteän aineen mekaniikan yhtälöitä, esimerkkikokoelma

Jukka Aalto



TEKNILLINEN KORKEAKOULU
TEKNISKA HÖGSKOLAN
HELSINKI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

1. Matematiikan käsitteitä ja merkintöjä

Tehtävä 1.1:

Osoita, että kahdelle mielivaltaiselle vektorille **u** ja **v** pätee:
$|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = 2(|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2)$

Ratkaisu:

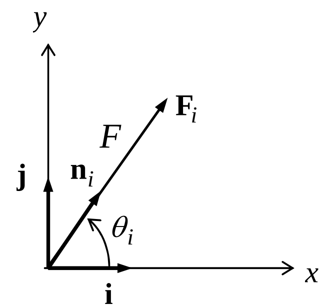
$$\begin{aligned}
|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 &= (\mathbf{u}-\mathbf{v})\bullet(\mathbf{u}-\mathbf{v}) + (\mathbf{u}+\mathbf{v})\bullet(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \\
&= \mathbf{u}\bullet\mathbf{u} - \mathbf{u}\bullet\mathbf{v} - \mathbf{v}\bullet\mathbf{u} + \mathbf{v}\bullet\mathbf{v} + \mathbf{u}\bullet\mathbf{u} + \mathbf{u}\bullet\mathbf{v} + \mathbf{v}\bullet\mathbf{u} + \mathbf{v}\bullet\mathbf{v} \\
&= 2(\mathbf{u}\bullet\mathbf{u} + \mathbf{v}\bullet\mathbf{v}) = \underline{\underline{2(|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2)}}.
\end{aligned}$$

Huom! Vektorin itseisarvo: $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}\bullet\mathbf{u}} \;\Rightarrow\; |\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u}\bullet\mathbf{u}$

Tehtävä 1.2:

Määritä kolmen samassa tasossa vaikuttavan 10kN:n suuruisen voiman, jotka vaikuttavat origossa ja muodostavat 60°, 120° ja 270° kulmat *x*-akselin suhteen, resultantin suuruus ja suunta.

Ratkaisu:



$\mathbf{n}_i = \cos\theta_i \mathbf{i} + \sin\theta_i \mathbf{j}$

Merkitään voimien suuruutta $F = 10\text{kN}$.
Voimien suuntaiset yksikkövektorit (kuva):

$\mathbf{n}_1 = \cos 60°\mathbf{i} + \sin 60°\mathbf{j} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j},$

$\mathbf{n}_2 = \cos 120°\mathbf{i} + \sin 120°\mathbf{j} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j},$

$\mathbf{n}_3 = \cos 270°\mathbf{i} + \sin 270°\mathbf{j} = -\mathbf{j}.$

Resultantti:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= F\mathbf{n}_1 + F\mathbf{n}_2 + F\mathbf{n}_3 = F(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3) \\
&= F(\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j} - \mathbf{j}) = F(\sqrt{3}-1)\mathbf{j}.
\end{aligned}$$

Suuruus: $R = |\mathbf{R}| = F(\sqrt{3-1}) = \underline{\underline{10(\sqrt{3-1})\text{kN}}}.$

Suunta: $\theta = \underline{\underline{90^o}}.$

Tehtävä 1.3:

Määritä pisteiden A: (1,0,3), B: (0,1,-1) ja C: (2,2,3) kautta kulkevan tason normaali ja sen yhtälö. Määritä vielä kolmion ABC pinta-ala.

Vektoreiden $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ja $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ristitulo on kohtisuorassa niiden määrittelemää tasoa vastaan ja siten myös pisteiden A, B ja C kautta kulkevaa tasoa vastaan. Lasketaan ristitulo:

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \mathbf{x}_{\mathrm{B}} - \mathbf{x}_{\mathrm{A}} = \mathbf{j} - \mathbf{k} - (\mathbf{i} + 3\mathbf{k}) = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k},$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \mathbf{x}_{\mathrm{C}} - \mathbf{x}_{\mathrm{A}} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} - (\mathbf{i} + 3\mathbf{k}) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j},$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 8\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

Suuruus:

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \sqrt{8^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{89}.$$

Yksikkönormaalivektori:

$$\mathbf{n} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{89}}(8\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}).}}$$

Tasolla olevan pisteen $\mathrm{P}:(x, y)$ paikkavektori:

$\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$

Tason suuntainen vektori $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$:

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\mathrm{A}} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} - (\mathbf{i} + 3\mathbf{k}) = (x-1)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z-3)\mathbf{k}.$

Vektoreiden $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ ja $\mathbf{n}$ kohtisuoruusehto:

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \bullet \mathbf{n} = 0$$

$$\Rightarrow\ [(x-1)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z-3)\mathbf{k}] \bullet \frac{1}{\sqrt{89}}(8\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) = 0$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{\sqrt{89}}[8(x-1) - 4y - 3(z-3)] = 0$$

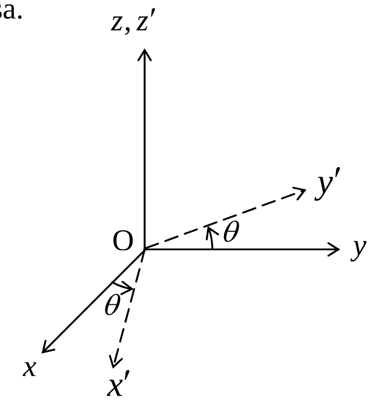
$$\Rightarrow\ \underline{\underline{8x - 4y - 3z + 1 = 0.}}$$

Kolmion ala:

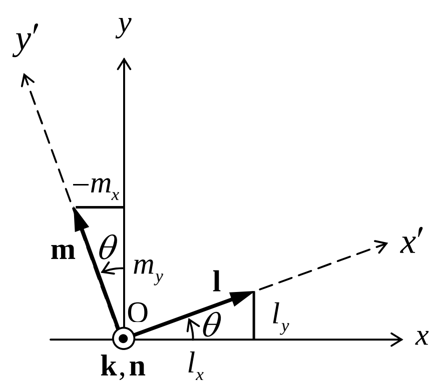
$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{89}.}}$$

Tehtävä 1.4:

Koordinaatisto x', y', z' saadaan koordinaatistosta x, y, z kiertämällä sitä oikean käden ruuvisäännön mukaisesti kulman θ verran z -akselin ympäri. Jos pisteellä P on koordinaatit (1,1,1) x, y, z – koordinaatistossa, määritä sen koordinaatit x', y', z' – koordinaatistossa. Jos pisteellä Q on koordinaatit (1,1,1) x', y', z' – koordinaatistossa, määritä sen koordinaatit x, y, z – koordinaatistossa.



Ratkaisu:



Oheisesta kuviosta nähdään helposti, että kantavektorien $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$ ja $\mathbf{n}$ komponentit ovat

$l_x = \cos\theta,\ l_y = \sin\theta,\ l_z = 0,$

$m_x = -\sin\theta,\ m_y = \cos\theta,\ m_z = 0,$

$n_x = \cos\theta,\ n_y = \sin\theta,\ n_z = 1,$

Koordinaatiston muunnosmatriisi ja origon O′ paikkavektori

$$[L] = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z \\ m_x & m_y & m_z \\ n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \{x_0\} = \{0\}.$$

Muunnos koordinaatistosta x, y, z koordinaatistoon x', y', z':

$\{x'\} = [L]^T(\{x'\} - \{x_0\}) = [L]\{x\}$

Pisteen P koordinaateille saadaan:

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ x' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos\theta + \sin\theta \\ -\sin\theta + \cos\theta \\ 1 \end{Bmatrix}$$

eli

$x' = \underline{\underline{\cos\theta + \sin\theta}},\ y' = \underline{\underline{-\sin\theta + \cos\theta}},\ z' = \underline{\underline{1}}$.

Muunnos koordinaatistosta x', y', z' koordinaatistoon x, y, z :

$\{x\} = \{x_0\} + [L]^T\{x'\} = [L]^T\{x'\}$

Pisteen Q koordinaateille saadaan:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos\theta - \sin\theta \\ \sin\theta + \cos\theta \\ 1 \end{Bmatrix}$$

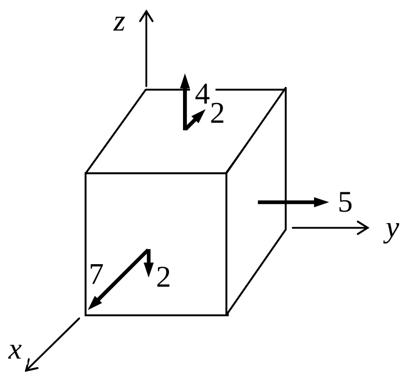
eli

$x = \underline{\underline{\cos\theta - \sin\theta}},\ y = \underline{\underline{\sin\theta + \cos\theta}},\ z = \underline{\underline{1}}$

2. Jännitystila

Tehtävä 2.1:

Tarkasteltavan pisteen P jännitystila x, y, z-koordinaatistossa on esitetty oheisen kuvion avulla



Määritä jännityskomponentit ja jännitysmatriisi sekä jännitysvektori (traktio), normaalijännitys, normaalijännitysvektori, leikkausjännitysvektori sekä leikkausjännityksen suuruus pisteen P kautta kulkevalla tasolla, jonka yksikkönormaalivektori on

$$\mathbf{n} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}\ .$$

Yksiköt ovat MPa. (Niitä ei tarvitse merkitä laskelmaan).

Ratkaisu:

Jännityskomponentit:

$$\sigma_x = 7,\ \sigma_y = 5,\ \sigma_z = 4,$$

$$\tau_{xy} = 0,\ \tau_{yz} = 0,\ \tau_{zx} = -2$$

Jännitysmatriisi:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Jännitysvektori:

$$\{t\}^{(n)} = [\sigma]\{n\} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 10/3 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

$$\mathbf{t}^{(n)} = \underline{\underline{(4\mathbf{i} + \frac{10}{3}\mathbf{j})}}$$

Normaalijännitys:

$$\sigma_n = \mathbf{n} \bullet \mathbf{t}^{(n)} = (\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}) \bullet (4\mathbf{i} + \frac{10}{3}\mathbf{j}) = \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot \frac{10}{3} = \underline{\underline{\frac{44}{9}}}$$

Normaalijännitysvektori:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n)} = \sigma_n \mathbf{n} = \frac{44}{9}(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}) = \underline{\underline{\frac{44}{27}(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})}}$$

Leikkausjännitysvektori:

$$\boldsymbol{\tau}^{(n)} = \mathbf{t}^{(n)} - \boldsymbol{\sigma}^{(n)} = 4\mathbf{i} + \frac{10}{3}\mathbf{j} - \frac{44}{27}(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \underline{\underline{\frac{2}{27}(10\mathbf{i} + \mathbf{j} - 22\mathbf{k})}}$$

Leikkausjännityksen suuruus:

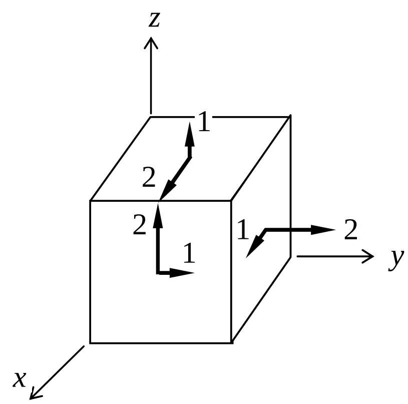
$$\tau^{(n)2} = \sqrt{|\mathbf{t^{(n)}}|^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{4^2 + (-\frac{10}{3})^2 - (\frac{44}{9})^2} = \sqrt{\frac{260}{81}} = \underline{\underline{\frac{2}{9}\sqrt{65}}}$$

tai

$$\tau^{(n)} = |\boldsymbol{\tau}^{(n)}| = \frac{2}{27}|10\mathbf{i} + \mathbf{j} - 22\mathbf{k}| = \frac{2}{27}\sqrt{10^2 + 1^2 + 22^2} = \underline{\underline{\frac{2}{9}\sqrt{65}}}$$

Tehtävä 2.2:

Tarkasteltavan pisteen jännitystila x, y, z -koordinaatistossa on esitetty oheisen kuvion avulla.



Mikä on jännitysvektori (traktio), joka vaikuttaa pisteen kautta kulkevan tason $x+3y+z=1$ ulkopinnalla (pinnalla, joka on poispäin origosta)? Mikä on normaalijännitys ja leikkausjännityksen suuruus? Yksiköt ovat MPa ja m. (Niitä ei tarvitse merkitä laskelmaan).

Ratkaisu:

Jännityskomponentit:

$\sigma_x = 0,\ \sigma_y = 2,\ \sigma_z = 1, \tau_{xy} = 1,\ \tau_{yz} = 0,\ \tau_{zx} = 2$

Jännitysmatriisi:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

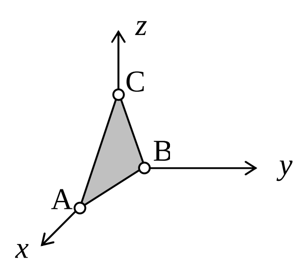
Tason normaalin määrittäminen:

Pisteet A, B ja C, joissa taso leikkaa koordinaattiakselit:

$$y_\mathrm{A} = z_\mathrm{A} = 0,\ x_\mathrm{A} + 3\overbrace{y_\mathrm{A}}^{0} + \overbrace{z_\mathrm{A}}^{0} = 1 \ \Rightarrow\ x_\mathrm{A} = 1,$$

$$x_\mathrm{B} = z_\mathrm{B} = 0,\ \overbrace{x_\mathrm{B}}^{0} + 3y_\mathrm{B} + \overbrace{z_\mathrm{B}}^{0} = 1 \ \Rightarrow\ y_\mathrm{B} = \frac{1}{3},$$

$$x_\mathrm{C} = y_\mathrm{C} = 0,\ \overbrace{x_\mathrm{C}}^{0} + 3\overbrace{y_\mathrm{C}}^{0} + z_\mathrm{C} = 1 \ \Rightarrow\ z_\mathrm{C} = 1.$$



Vektorit $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ja $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A})\mathbf{i} + (y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A})\mathbf{j} + (z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A})\mathbf{k} = (0-1)\mathbf{i} + (\frac{1}{3} - 0)\mathbf{j} + (0-0)\mathbf{k} = -\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (x_\mathrm{C} - x_\mathrm{A})\mathbf{i} + (y_\mathrm{C} - y_\mathrm{A})\mathbf{j} + (z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A})\mathbf{k} = (0-1)\mathbf{i} + (0-0)\mathbf{j} + (1-0)\mathbf{k} = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$$

Tasoa ABC vastaan kohtisuora vektori:

$$\mathbf{N} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j}) \times (-\mathbf{i} + \mathbf{k}) = \mathbf{i} \times \mathbf{i} - \mathbf{i} \times \mathbf{k} - \frac{1}{3}\mathbf{j} \times \mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \frac{1}{3}\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$$

Tason yksikkönormaalivektori:

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}=\frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{3})^2+1+(\frac{1}{3})^2}}(\frac{1}{3}\mathbf{i}+\mathbf{j}+\frac{1}{3}\mathbf{k})=\frac{3}{\sqrt{11}}(\frac{1}{3}\mathbf{i}+\mathbf{j}+\frac{1}{3}\mathbf{k})=\frac{1}{\sqrt{11}}(\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

Sen komponenttien sarakematriisi:

$$\{n\}=\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{Bmatrix}1\\3\\1\end{Bmatrix}$$

Jännitysvektorin komponenttien ja jännityskomponenttien yhteydestä seuraa:

$$\{t\}^{(n)}=[\sigma]\{n\}=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&2&0\\2&0&1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{Bmatrix}1\\3\\1\end{Bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{Bmatrix}5\\7\\3\end{Bmatrix},$$

Jännitysvektori:

$$\underline{\underline{\mathbf{t}^{(n)}=\frac{1}{\sqrt{11}}(5\mathbf{i}+7\mathbf{j}+3\mathbf{k}).}}$$

Normaalijännitys:

$$\sigma_n=\mathbf{n}\bullet\mathbf{t}^{(n)}=n_xt_x+n_yt_y+n_zt_z=\frac{1}{\sqrt{11}}\cdot\frac{5}{\sqrt{11}}+\frac{3}{\sqrt{11}}\cdot\frac{7}{\sqrt{11}}+\frac{1}{\sqrt{11}}\cdot\frac{3}{\sqrt{11}}=\frac{5+21+3}{11}=\underline{\underline{\frac{29}{11}}}.$$

Leikkausjännityksen suuruus:

$$\tau^{(n)}=\sqrt{|\mathbf{t}^{(n)}|^2-\sigma^{(n)2}}=\sqrt{t_x^2+t_y^2+t_z^2-\sigma^{(n)2}}=\sqrt{(\frac{5}{\sqrt{11}})^2+(\frac{7}{\sqrt{11}})^2+(\frac{3}{\sqrt{11}})^2-(\frac{29}{11})^2}$$

$$=\frac{1}{11}\sqrt{25\cdot11+49\cdot11+9\cdot11-29^2}=\frac{1}{11}\sqrt{72}=\underline{\underline{\frac{6\sqrt{2}}{11}}}.$$

Huom: Tason yksikkönormaali voidaan myös määrittää käyttäen hyväksi tietoa: Funktion $f(x,y,z)$ gradienttivektori, on pinnan, jonka yhtälö on $f(x,y,z)=0$, normaalin suuntainen. Tarkasteltavan pinnan (tason) tapauksessa $f(x,y,z)=x+3y+z-1$, joten normaalin suuntaiseksi vektoriksi saadaan

$$\mathbf{N}=\vec{\nabla}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}=1\cdot\mathbf{i}+3\cdot\mathbf{j}+1\cdot\mathbf{k}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

ja yksikkönormaalivektoriksi

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}=\frac{\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{1+3^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{11}}(\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}).$$

Tehtävä 2.3:

Pisteen jännitystila on esitetty jännitysmatriisina

$$[\sigma]=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}\text{MPa}\ .$$

karteesisessa $x, y, z-$koordinaatistossa. Määritä jännitystensorin matriisi $[\sigma']$ karteesisessa $x', y', z'-$koordinaatistossa, jonka $x'-$ ja $z'-$akselien suuntaiset kantavektorin ovat

$$\mathbf{l}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{j}+\mathbf{k})\ ,\ \mathbf{n}=\frac{1}{2}(-\sqrt{2}\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})$$

Ratkaisu:

$y'-$akselin suuntainen kantavektori:
Kantavektorien ristitulon lausekkeesta $\mathbf{n}\times\mathbf{l}=\mathbf{m}$ seuraa

$$\mathbf{m}=\mathbf{n}\times\mathbf{l}=\frac{1}{2}(-\sqrt{2}\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})\times\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{j}+\mathbf{k})=\frac{1}{2\sqrt{2}}(-\sqrt{2}\,\overbrace{\mathbf{i}\times\mathbf{j}}^{\mathbf{k}}-\sqrt{2}\,\overbrace{\mathbf{i}\times\mathbf{k}}^{-\mathbf{j}}+\overbrace{\mathbf{j}\times\mathbf{j}}^{\mathbf{0}}+\overbrace{\mathbf{j}\times\mathbf{k}}^{\mathbf{i}}-\overbrace{\mathbf{k}\times\mathbf{j}}^{-\mathbf{i}}-\overbrace{\mathbf{k}\times\mathbf{k}}^{\mathbf{0}})$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{2}\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})$$

Kantavektoreiden $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$ ja $\mathbf{n}$ komponentit:

$$l_x=0,\ l_y=\frac{1}{\sqrt{2}},\ l_z=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$m_x=\frac{1}{\sqrt{2}},\ m_y=\frac{1}{2},\ m_z=-\frac{1}{2},$$

$$n_x=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ n_y=\frac{1}{2},\ n_z=-\frac{1}{2}.$$

Koordinaatiston muunnosmatriisi:

$$[L]=\begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Saadaan:

$$[\sigma']=[L][\sigma][L]^T=\begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2}-1 & -\sqrt{2}-1 \\ 1 & -\sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2}/2 \\ -1 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}=\underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1-\sqrt{2} & -1 \\ 2 & -1 & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}}}$$

Jännitystensorin symmetrian takia tuloksen tulee olla symmetrinen. Tämä on hyvä tarkistus.

Tehtävä 2.4:

Jännitysvektorit kolmella tarkasteltavan pisteen kautta kulkevalla tasolla ja ko. tasojen yksikkönormaalivektorit ovat

$$\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{i},$$

$$\mathbf{t}^{(n)} = 2\sqrt{3}\mathbf{i} + 2\sqrt{3}\mathbf{j}, \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}),$$

$$\mathbf{t}^{(n)} = 2(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}), \quad \mathbf{n} = \mathbf{j}.$$

Määritä jännityskomponentit ko. pisteessä ja sen matriisi.

Ratkaisu:

Tarkastellaan ensin jännitysvektoria:

$$\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{i},$$

Jännitysvektorin ja vastaavan yksikkönormaalin komponentit ovat siis

$$t_x^{(n)} = 1,\ t_x^{(n)} = 2,\ t_z^{(n)} = 3,$$

$$n_x = 1,\ n_y = 0,\ n_z = 0.$$

Kaavasta $\{t\}^{(n)} = [\sigma]\{n\}$ seuraa

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \sigma_x \cdot 1 + \tau_{xy} \cdot 0 + \tau_{zx} \cdot 0 \\ 2 = \tau_{xy} \cdot 1 + \sigma_y \cdot 0 + \tau_{yz} \cdot 0 \\ 3 = \tau_{zx} \cdot 1 + \tau_{yz} \cdot 0 + \sigma_z \cdot 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = 1 \\ \tau_{xy} = 2 \\ \tau_{zx} = 3 \end{cases}$$

Tarkastellaan toiseksi jännitysvektoria:

$$\mathbf{t}^{(n)} = 2(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}), \quad \mathbf{n} = \mathbf{j}$$

Jännitysvektorin ja vastaavan yksikkönormaalin komponentit ovat siis

$$t_x^{(n)} = 2,\ t_y^{(n)} = 2,\ t_z^{(n)} = 2,$$

$$n_x = 0,\ n_y = 1,\ n_z = 0.$$

Kaavasta $\{t\}^{(n)} = [\sigma]\{n\}$ seuraa

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2 = \sigma_x \cdot 0 + \tau_{xy} \cdot 1 + \tau_{zx} \cdot 0 \\ 2 = \tau_{xy} \cdot 0 + \sigma_y \cdot 1 + \tau_{yz} \cdot 0 \\ 2 = \tau_{zx} \cdot 0 + \tau_{yz} \cdot 1 + \sigma_z \cdot 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tau_{xy} = 2 \\ \sigma_y = 2 \\ \tau_{yz} = 2 \end{cases}$$

Tarkastellaan lopuksi jännitysvektoria:

$$\mathbf{t}^{(n)} = 2\sqrt{3}\mathbf{i} + 2\sqrt{3}\mathbf{j}, \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

Jännitysvektorin ja vastaavan yksikkönormaalin komponentit ovat siis

$$t_x^{(n)} = 2\sqrt{3},\ t_y^{(n)} = 2\sqrt{3},\ t_z^{(n)} = 0,$$

$$n_x = \frac{1}{\sqrt{3}},\ n_y = \frac{1}{\sqrt{3}},\ n_z = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Kaavasta $\{t\}^{(n)} = [\sigma]\{n\}$ seuraa

$$\begin{Bmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3} = \sigma_x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \tau_{xy} \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \tau_{zx} \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ 2\sqrt{3} = \tau_{yx} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \sigma_y \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \tau_{yz} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 = \tau_{zx} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \tau_{yz} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \sigma_z \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_x + \tau_{xy} + \tau_{zx} = 6 \\ \tau_{xy} + \sigma_y + \tau_{yz} = 6 \\ \tau_{zx} + \tau_{yz} + \sigma_z = 0 \end{cases}$$

Sijoittamalla näihin yhtälöihin edellä saadut tulokset, nähdään heti, että kaksi ensimmäistä yhtälöä toteutuvat ja viimeisestä yhtälöstä saadaan

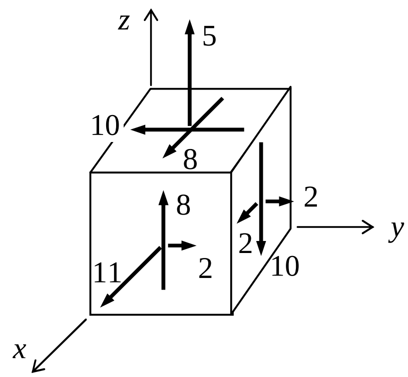
$3 + 2 + \sigma_z = 0 \;\Rightarrow\; \sigma_z = -5.$

Näin jännityskomponenttien muodostama matriisi on:

$$\underline{\underline{[\sigma] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix}}}$$

Tehtävä 2.5:

Määritä oheiselle jännitystilalle jännitysinvariantit, pääjännitykset, suurimman pääjännityksen suuntainen yksikkövektori sekä suurin leikkausjännitys ja sitä vastaava normaalijännitys. Yksikkönä on MPa.



Ratkaisu:

Kuvan perusteella:

$\sigma_x = 11\text{MPa},\ \sigma_y = 2\text{MPa},\ \sigma_z = 5\text{MPa},\ \tau_{xy} = 2\text{MPa},\ \tau_{yz} = -10\text{MPa},\ \tau_{zx} = 8\text{MPa}$

$$\Rightarrow\ [\sigma] = \begin{bmatrix} 11 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & -10 \\ 8 & -10 & 5 \end{bmatrix}$$

Jännitysinvariantit:

$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 11 + 2 + 5 = \underline{\underline{18\text{MPa}}}$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_z & \tau_{zx} \\ \tau_{zx} & \sigma_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -10 \\ -10 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= 22 - 4 + 10 - 100 + 55 - 64 = \underline{\underline{-81(\text{MPa})^2}}$$

$$I_3 = \det[\sigma] = \begin{vmatrix} 11 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & -10 \\ 8 & -10 & 5 \end{vmatrix} = 11\begin{vmatrix} 2 & -10 \\ -10 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -10 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 8 & -10 \end{vmatrix}$$

$$= 11(10 - 100) - 2(10 + 80) + 8(-20 - 16) = \underline{\underline{-1458(\text{MPa})^3}}$$

Pääjännitykset:

Yhtälön $\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$ ratkaisu:

$$Q = \frac{3I_2 - I_1^2}{9} = \frac{3\cdot(-81) - 18^2}{9} = -63$$

$$R = \frac{2I_1^3 + 27I_3 - 9I_1I_2}{54} = \frac{2\cdot 18^3 + 27\cdot(-1458) - 9\cdot 18\cdot(-81)}{54} = -270$$

$$D = Q^3 + R^2 = (-63)^3 + (-270)^2 = -177147 < 0 \text{ OK}$$

$$\varphi = \arccos\frac{R}{\sqrt{-Q^3}} = \arccos\frac{-270}{\sqrt{-(-63)^3}} = 122{,}68°$$

$$\sigma_1 = 2\sqrt{-Q}\cos(\frac{1}{3}\varphi) + \frac{I_1}{3} = 2\sqrt{63}\cos(\frac{122,68°}{3}) + \frac{18}{3} = 18\text{MPa}$$

$$\sigma_2 = 2\sqrt{-Q}\cos(\frac{1}{3}\varphi + 120°) + \frac{I_1}{3} = 2\sqrt{63}\cos(\frac{122,68°}{3} + 120°) + \frac{18}{3} = -9\text{MPa}$$

$$\sigma_3 = 2\sqrt{-Q}\cos(\frac{1}{3}\varphi + 240°) + \frac{I_1}{3} = 2\sqrt{63}\cos(\frac{122,68°}{3} + 240°) + \frac{18}{3} = 9\text{MPa}$$

Pääjännitykset suuruusjärjestyksessä:

$\sigma_I = \underline{\underline{18\text{MPa}}}$, $\sigma_{II} = \underline{\underline{9\text{MPa}}}$, $\sigma_{III} = \underline{\underline{-9\text{MPa}}}$

Suurimman pääjännityksen suuntainen yksikkövektori:

$([\sigma] - \sigma_I [I])\{n\} = \{0\}$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 11-\sigma_I & 2 & 8 \\ 2 & 2-\sigma_I & -10 \\ 8 & -10 & 5-\sigma_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} -7 & 2 & 8 \\ 2 & -16 & -10 \\ 8 & -10 & -13 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ratkaistaan n_x ja n_y kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä:

$$\begin{matrix} -7n_x + 2n_y + 8n_z = 0 \\ 2n_x - 16n_y - 10n_z = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 2 & -16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -8 \\ 10 \end{Bmatrix} n_z$$

$\Rightarrow$

$$\begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 2 & -16 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -8 \\ 10 \end{Bmatrix} n_z$$

$$= \frac{1}{(-7)\cdot(-16) - 2^2} \begin{bmatrix} -16 & -2 \\ -2 & -7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -8 \\ 10 \end{Bmatrix} n_z = \frac{1}{108} \begin{Bmatrix} 108 \\ -54 \end{Bmatrix} n_z = \begin{Bmatrix} n_z \\ -\frac{1}{2} n_z \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $n_x = n_z$, $n_y = -\frac{1}{2} n_z$.

Sijoitetaan ne ehtoon $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$, jolloin saadaan

$$n_z^2 + (-\frac{1}{2} n_z)^2 + n_z^2 = 1 \Rightarrow \frac{9}{4} n_z^2 = 1 \Rightarrow n_z = \frac{2}{3}$$

$$n_x = \frac{2}{3},\ n_y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{3},\ n_z = \frac{2}{3}.$$

Tulos on

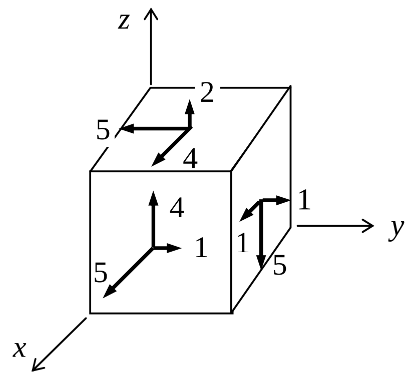
$$\underline{\underline{\mathbf{n} = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})}}.$$

Suurin leikkausjännitys ja sitä vastaava normaalijännitys:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{18-(-9)}{2} \approx \underline{\underline{13,5\text{MPa}}},\ \sigma_\tau = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} = \frac{18+(-9)}{2} \approx \underline{\underline{4,5\text{MPa}}}$$

Tehtävä 2.6:

Tarkasteltavan pisteen P jännitystila x, y, z-koordinaatistossa on esitetty oheisen kuvion avulla



Yksiköt ovat MPa. Määritä (a) jännityskomponentit, (b) jännitysmatriisi, (c) jännitysinvariantit, (d) pääjännitykset, (e) suurimman pääjännityksen suuntainen yksikkövektori sekä (f) suurin leikkausjännitys ja sitä vastaava normaalijännitys pisteessä P.

Ratkaisu:

(a)

$\sigma_x = 5\text{MPa},\ \sigma_y = 1\text{MPa},\ \sigma_z = 2\text{MPa},\ \tau_{xy} = 1\text{MPa},\ \tau_{yz} = -5\text{MPa},\ \tau_{zx} = 4\text{MPa}$

(b)

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -5 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

(c)

$$I_1 = 5 + 1 + 2 = \underline{\underline{8}}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 1 + 2 - 25 + 10 - 16 = \underline{\underline{-25}}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -5 \\ 4 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 20 - 20 - (125 + 2 + 16) = \underline{\underline{-173}}$$

(d)

$$Q = \frac{3I_2 - I_1^2}{9} = \frac{3(-25) - 8^2}{9} = -\frac{139}{9},$$

$$R = \frac{2I_1^3 + 27I_3 - 9I_1I_2}{54} = \frac{2 \cdot 8^3 + 27 \cdot (-173) + -9 \cdot 8 \cdot (-25)}{54} = -\frac{1847}{54}$$

$$D = Q^3 + R^2 = -2514,05 < 0,\ \text{OK}$$

$$\varphi = \arccos\frac{R}{\sqrt{-Q_3}} = \arccos\frac{-1847/54}{\sqrt{(139/9)^3}} = 124,30°$$

$$\sigma_1 = 2\sqrt{\frac{139}{9}}\cos(\frac{1}{3}\cdot 124,30°) + \frac{8}{3} = \underline{\underline{8,5594\text{MPa}}}$$

$$\sigma_2 = 2\sqrt{\frac{139}{9}}\cos(\frac{1}{3}\cdot 124,30° + 120°) + \frac{8}{3} = \underline{\underline{-4,7841\text{MPa}}}$$

$$\sigma_3 = 2\sqrt{\frac{139}{9}}\cos(\frac{1}{3}\cdot 124,30° + 240°) + \frac{8}{3} = \underline{\underline{4,2247\text{MPa}}}$$

(e)

$$\begin{bmatrix} 5-8,5594 & 1 & 4 \\ 1 & 1-8,5594 & -5 \\ 4 & -5 & 2-8,5594 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -3,5594 & 1 & 4 \\ 1 & -7,5594 & -5 \\ 4 & -5 & -6,5594 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n_x - 7,5594 n_y - 5 n_z = 0 & |\cdot(-4) \\ 4n_x - 5n_y - 6,5594 n_z = 0 \end{cases}$$

$$25,2376 n_y + 13,4406 n_z = 0 \;\Rightarrow\; n_y = -0,5326 n_z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3,5594 n_x + n_y + 4n_z = 0 & |\cdot 5 \\ 4n_x - 5n_y - 6,5594 n_z = 0 \end{cases}$$

$$-13,797 n_x + 13,4406 n_z = 0 \;\Rightarrow\; n_x = 0,9742 n_z$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; (0,9742^2 + 0,5326^2 + 1)n_z^2 = 1 \;\Rightarrow\; n_z = \pm 0,6692$$

$$n_x = 0,9742\cdot(\pm 0,6692) = \pm 0,6519$$

$$n_y = -0,5326\cdot(\pm 0,6692) = \mp 0,3564$$

$$n_z = \pm 0,6692$$

$$\underline{\underline{\mathbf{n} = \pm(0,6519\mathbf{i} - 0,3564\mathbf{j} + 0,6692\mathbf{k}}}$$

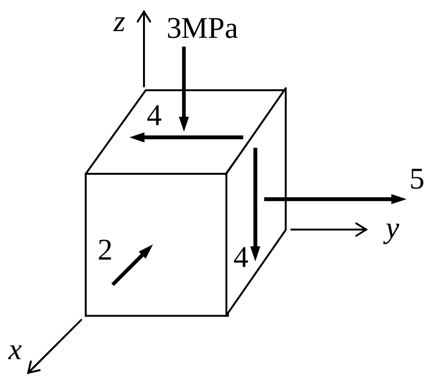
(f)

$$\tau_{\max} = \frac{8,5594-(-4,7841)}{2} = \underline{\underline{6,672\text{MPa}}},$$

$$\sigma_\tau = \frac{8,5594+(-4,7841)}{2} = \underline{\underline{1,888\text{MPa}}}$$

Tehtävä 2.7:

Määritä oheisen jännitystilan (a) pääjännitykset sekä (b) suurin leikkausjännitys ja sitä vastaava normaalijännitys.



Ratkaisu:

Jännityskomponentit ja jännitysmatriisi:

$\sigma_x = -2,\ \sigma_y = 5,\ \sigma_z = -3,\ \tau_{xy} = 0,\ \tau_{yz} = -4,\ \tau_{zx} = 0.$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & -.3 \end{bmatrix} \text{MPa.}$$

(a) Pääjännitykset:

(Tässä tapauksessa jännitysmatriisi on niin harva, että ratkaisu onnistuu lähtien pääjännitysten determinanttiyhtälöstä.)

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ \begin{vmatrix} -2-\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 5-\sigma & -4 \\ 0 & -4 & -3-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow\ (-2-\sigma)(5-\sigma)(-3-\sigma) - 4\cdot 4(-2-\sigma) = 0 \ \Rightarrow\ (-2-\sigma)(\sigma^2 - 2\sigma - 31) = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sigma_1 = -2,\ \sigma_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1^2 + 31} = 1 \pm 4\sqrt{2}.$$

Suuruusjärjestyksessä:

$$\underline{\underline{\sigma_I = 1 + 4\sqrt{2} \approx 6{,}66\text{MPa},\ \sigma_{II} = -2\text{MPa},\ \sigma_{III} = 1 - 4\sqrt{2} \approx -4{,}66\text{MPa}.}}$$

(b) Suurin leikkausjännitys:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{1 + 4\sqrt{2} - (1 - 4\sqrt{2})}{2} = 4\sqrt{2} = \underline{\underline{5{,}66\text{MPa}}}.$$

Tehtävä 2.8:

Maan sisällä vallitsee maan painosta aiheutuva hydrostaattinen paine ja maan kuoren liikkeestä aiheutuva leikkausjännitys. Tarkasteltavassa pisteessä hydrostaattinen paine on $p = 10\text{MPa}$ ja leikkausjännitys valitussa koordinaatistossa x, y, z on $\tau_{xy} = 5\text{MPa}$. Määritä (a) pääjännitykset, (b) suurin leikkausjännitys ja (c) pienimmän pääjännityksen suunta. *Ohje:* Hydrostaattista painetta p vastaa normaalijännitykset $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$.

Ratkaisu:

Jännityskomponentit:

$\sigma_x = -10,\ \sigma_y = -10,\ \sigma_z = -10,\ \tau_{xy} = 5,\ \tau_{yz} = 0,\ \tau_{zx} = 0.$

Jännitysmatriisi:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -10 & 5 & 0 \\ 5 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

(a) Pääjännitykset:

(Tässä tapauksessa jännitysmatriisi on niin harva, että ratkaisu onnistuu lähtien pääjännitysten determinanttiyhtälöstä.)

$\det([\sigma] - \sigma[I]) = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -10-\sigma & 5 & 0 \\ 5 & -10-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -10-\sigma \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow\ [(-10-\sigma)(-10-\sigma) - 5^2](-10-\sigma) = 0$$

$$\Rightarrow\ (\sigma^2 + 20\sigma + 75)(\sigma + 10) = 0 \ \Rightarrow\ \sigma^2 + 20\sigma + 75 = 0,\ \sigma + 10 = 0,$$

$$\Rightarrow\ \sigma_{1,2} = -\frac{20}{2} \pm \sqrt{(\frac{20}{2})^2 - 75} = -10 \pm \sqrt{25},\ \sigma_3 = -10 \ \Rightarrow\ \sigma_1 = -5,\ \sigma_2 = -15,\ \sigma_3 = -10.$$

Suuruusjärjestyksessä:

$\underline{\underline{\sigma_I = -5\text{MPa},\ \sigma_{II} = -10\text{MPa},\ \sigma_{III} = -15\text{MPa}.}}$

(b) Suurin leikkausjännitys ja sitä vastaava normaalijännitys:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{-5-(-15)}{2} = \underline{\underline{5\text{MPa.}}}$$

$$\sigma_\tau = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} = \frac{-5+(-15)}{2} = \underline{\underline{-10\text{MPa.}}}$$

(c) Pienimmän pääjännityksen suuntainen yksikkövektori:

$$([\sigma - \sigma_{III}[I])\{n\} = \{0\} \ \Leftrightarrow\ \begin{bmatrix} -10-(-15) & 5 & 0 \\ 5 & -10-(-15) & 0 \\ 0 & 0 & -10-(-15) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \ \Rightarrow\ \begin{cases} 5n_x + 5n_y = 0 \ \Rightarrow\ n_y = -n_x, \\ n_z = 0. \end{cases}$$

$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \;\Rightarrow\; n_x^2 + (-n_x)^2 + 0^2 = 1 \;\Rightarrow\; 2n_x^2 = 1 \;\Rightarrow\; n_x = \frac{1}{\sqrt{2}} = -n_y$

$\Rightarrow\; n_x = \frac{1}{\sqrt{2}},\; n_y = -\frac{1}{\sqrt{2}},\; n_z = 0$

Näin pienimmän pääjännityksen suuntainen yksikkövektori on:

$$\underline{\underline{\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{j})}}$$

Koska kysymyksessä on **tasomuodonmuutostila**, esitetään vaihtoehtoinen ratkaisu I tasotapauksen kaavoja ja ratkaisu II Mohrin ympyrää käyttäen:

Vaihtoehtoinen ratkaisu I:

(a) Pääjännitykset:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{1}{2}(-10-10) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(-10+10)^2 + 4\cdot 5^2}$$

$$= -10 \pm 5 \;\Rightarrow\; \sigma_1 = -5,\; \sigma_2 = -15;\; \sigma_3 = \sigma_z = -10\text{MPa}$$

$\sigma_I = \underline{\underline{-5\text{MPa}}},\quad \sigma_{II} = \underline{\underline{-10\text{MPa}}},\quad \sigma_{III} = \underline{\underline{-15\text{MPa}}}$

(b) Suurin leikkausjännitys ja sitä vastaava normaalijännitys:

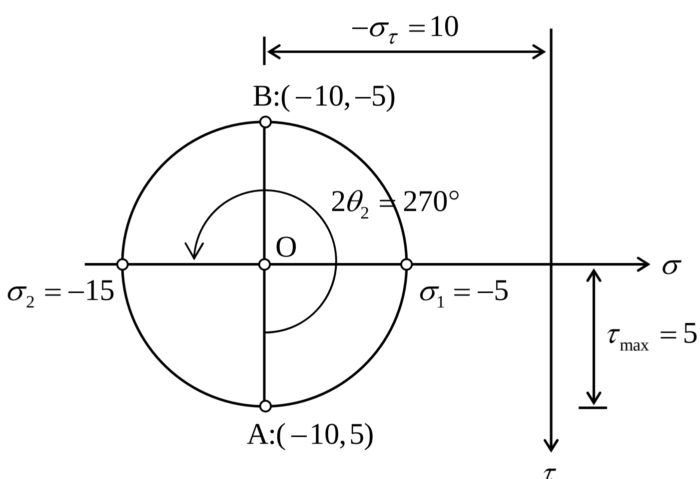
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{-5-(-15)}{2} = \underline{\underline{5\text{MPa.}}}$$

$$\sigma_\tau = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} = \frac{-5+(-15)}{2} = \underline{\underline{-10\text{MPa.}}}$$

(c) Pienimmän pääjännityksen suuntakulma:

$$\theta_2 = \arctan\frac{\sigma_2 - \sigma_x}{\tau_{xy}} = \arctan\frac{-15-(-10)}{5} = \underline{\underline{-45°}}$$

Vaihtoehtoinen ratkaisu II:



Mohrin ympyrästä nähdään:

$\sigma_1 = -5\text{MPa},\; \sigma_2 = -15\text{MPa}$

Lisäksi: $\sigma_3 = \sigma_z = -10\text{MPa}$

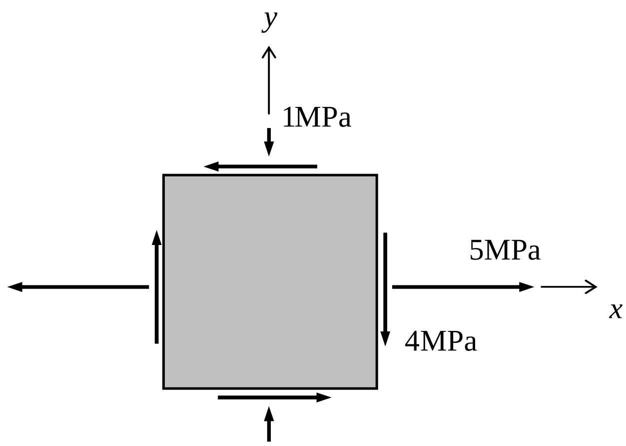
Mohrin ympyrästä nähdään:

$\theta_2 = 135°$

$\tau_{\max} = 5\text{MPa},\; \sigma_\tau = -10\text{MPa}$

Tehtävä 2.9:

Määritä kuvan tasojännitystilalle pääjännitykset, suurimman pääjännityksen suuntakulma, suurin leikkausjännitys ja sitä vastaava normaalijännitys sekä jännityskomponentit σ'_x, σ'_y ja τ'_{xy} koordinaatistossa, joka on kiertynyt vastapäivään kulman $\theta = 35°$, käyttäen (a) tasojännitystilan Mohrin ympyrää sekä (b) käyttäen analyyttisiä kaavoja. Yksiköt ovat MPa.

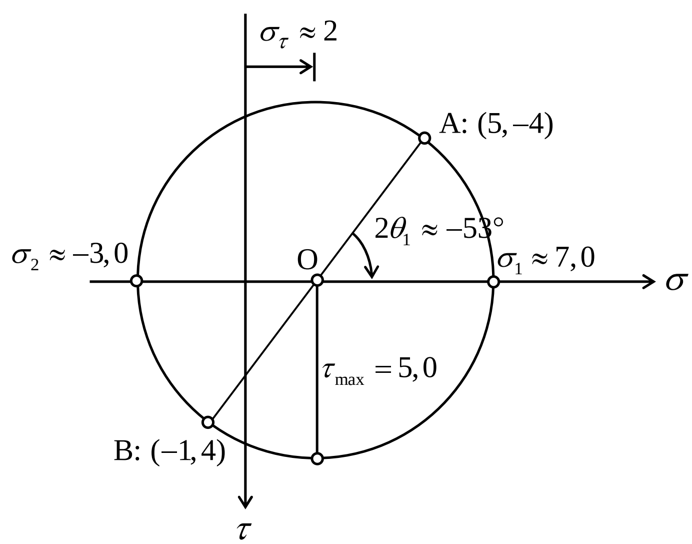


Ratkaisu:

Kuvan perusteella: $\sigma_x = 5\text{MPa}$, $\sigma_y = -1\text{MPa}$, $\tau_{xy} = -4\text{MPa}$.

Koska on tasojännitystila: $\sigma_z = 0$.

(a)



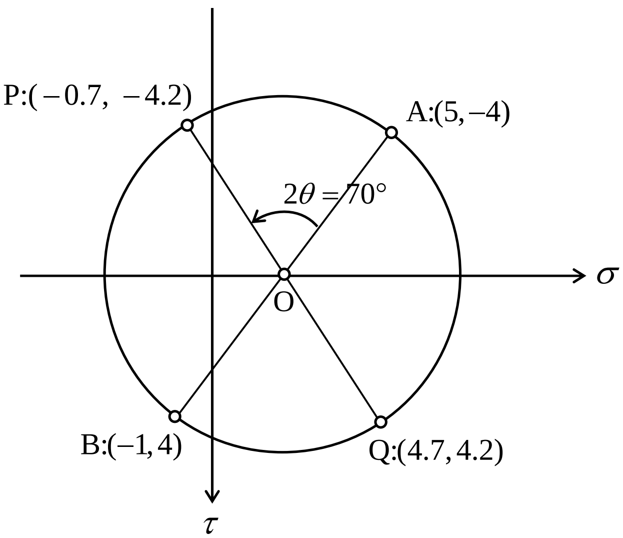
Kuvasta saadaan tulokset:

$\sigma_1 \approx \underline{\underline{7,0\text{MPa}}}$, $\sigma_2 \approx \underline{\underline{-3,0\text{MPa}}}$

$\theta_1 \approx -53/2 = \underline{\underline{-26,5°}}$

$\tau_{max} \approx \underline{\underline{5\text{MPa}}}$, $\sigma_\tau \approx \underline{\underline{2\text{MPa}}}$

Koska $\sigma_3 = \sigma_z = 0$, $\sigma_I = \underline{\underline{7,0\text{MPa}}}$, $\sigma_{II} = \underline{\underline{0}}$, $\sigma_{III} = \underline{\underline{-3,0\text{MPa}}}$.



Kuvasta saadaan tulokset:

$\sigma_x' = \sigma_P \approx \underline{\underline{-0,7\text{MPa}}},\ \tau_{xy}' = \tau_P \approx \underline{\underline{-4,2\text{MPa}}},\ \sigma_y' = \sigma_Q \approx \underline{\underline{4,7\text{MPa}}}$

(b)

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{1}{2}(5-1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(5+1)^2 + 4\cdot 4^2} = 2 \pm 5$$

$$\Rightarrow\ \sigma_1 = 7,\ \sigma_2 = -3;\ \sigma_3 = \sigma_z = 0$$

$$\Rightarrow\ \sigma_I = \underline{\underline{7\text{MPa}}},\ \sigma_{II} = \underline{\underline{0}},\ \sigma_{III} = \underline{\underline{-3\text{MPa}}};$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{7-(-3)}{2} = \underline{\underline{5\text{MPa}}},\ \sigma_\tau = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} = \frac{7+(-3)}{2} = \underline{\underline{2\text{MPa}}}$$

$$[\sigma'] = [L][\sigma][L]^T \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x' & \tau_{xy}' \\ \tau_{xy}' & \sigma_y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,819 & 0,574 \\ -0,574 & 0,819 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,819 & -0,574 \\ 0,574 & 0,819 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,819 & 0,574 \\ -0,574 & 0,819 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,799 & -6,146 \\ -3,85 & 1,477 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0,74 & -4,19 \\ -4,19 & 4,74 \end{bmatrix}$$

Siis: $\sigma_x' = \underline{\underline{-0,74\text{MPa}}},\ \sigma_y' = \underline{\underline{4,74\text{MPa}}},\ \tau_{xy}' = \underline{\underline{-4,19\text{MPa}}}$

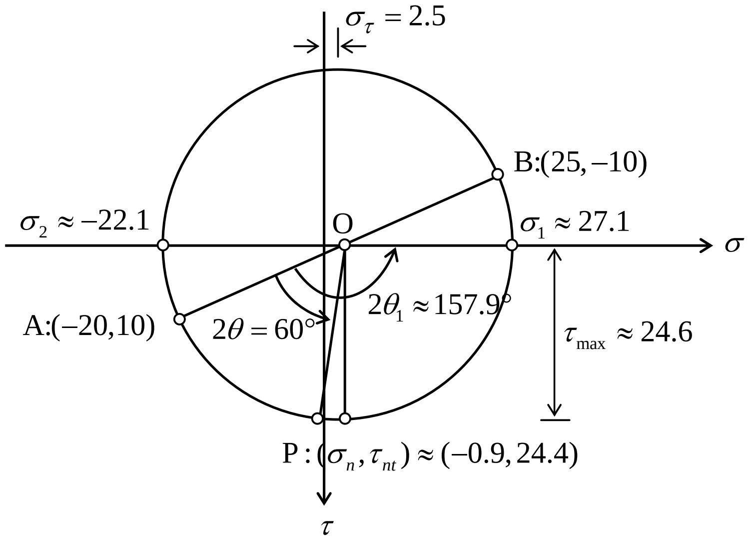
Vähän helpommin viimeinen tulos saadaan käyttäen kaavakokoelman kaavoja.

$$\begin{cases} \sigma_x' = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta = \dfrac{5-1}{2} + \dfrac{5+1}{2}\cos 70° - 4\sin 70° = \underline{\underline{0,73\text{MPa}}}, \\ \sigma_y' = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta = \dfrac{5-1}{2} - \dfrac{5+1}{2}\cos 70° + 4\sin 70° = \underline{\underline{4,74\text{MPa}}}, \\ \tau_{xy}' = -\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta = -\dfrac{5+1}{2}\sin 70° - 4\cos 70° = \underline{\underline{-4,19\text{MPa}}} \end{cases}$$

Tehtävä 2.10:

Käyttäen tasojännitystilan Mohrin ympyrää määritä (a) pääjännitykset (b) ja suurimman pääjännityksen suuntakulma, (c) suurin leikkausjännitys ja sitä vastaava normaalijännitys sekä (d) normaali- ja leikkausjännitys pinnalla, jonka normaali muodostaa kulman $\theta = 30°$ x-akselin suhteen, seuraavalle tasojännitystilalle: $\sigma_x = -20$, $\sigma_y = 25$ $\tau_{xy} = 10$. Yksiköt ovat kPa.

Ratkaisu:



Kuvan perusteella saadaan:

$\sigma_1 \approx 27{,}1\text{kPa}$, $\sigma_2 \approx -22{,}1\text{kPa}$, $\theta_1 \approx 157{,}9°/2 = 79{,}0°$, $\tau_{max} \approx 24{,}6\text{kPa}$, $\sigma_\tau \approx 2{,}5\text{kPa}$

$\sigma_n \approx -0{,}9\text{kPa}$, $\tau_{nt} \approx 24{,}4\text{kPa}$.

Koska $\sigma_3 = \sigma_z = 0$, σ_1 on suurin ja σ_2 on pienin pääjännitys. Näin τ_{max} on suurin leikkausjännitys kaikilla pinnoilla.

Tehtävä 2.11:

Tarkastellaan poikkileikkaukseltaan muuttumatonta, suoraa sauvaa, johon on liitetty karteesinen x, y, z – koordinaatisto siten, että x-akseli yhtyy sauvan akseliin (poikkileikkausten pintakeskiöiden ura). Jos sauvan poikkileikkauksen mitat ovat sauvan pituuteen nähden pienet, ja jos sauvan sivupinnoille ei kohdistu kuormitusta, voidaan jännityskomponenttien σ_y, σ_z ja τ_{yz} otaksua häviävän. Johda sauvan pääjännityksille, suurimmalle leikkausjännitykselle ja sitä vastaavalle leikkausjännitykselle tarkasteltavassa pisteessä seuraavat kaavat

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}),\ \sigma_3 = 0,\quad \tau_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2},\ \sigma_\tau = \sigma_x .$$

missä $\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$ resultoiva leikkausjännitys sauvan poikkileikkauspinnalla.

Ratkaisu:

Perustellaan aluksi miksi voidaan tehdä otaksuma $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$. Ensimmäiseksi otaksutaan, että leikkausjännitys τ_{yz} häviää. (Tämä perustuu olettamukseen, että sauvan deformoituessa sen poikkileikkauksen muoto ei muutu. Tällöin liukuma γ_{yz} häviää ja leikkauksen Hooken lain perusteella $\tau_{xy} = G\gamma_{yz} = 0$.) Koska sauvan sivupinnat oletetetaan kuormittamattomiksi, traktiovektorille näillä pinnoilla pätee $\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{0}$. Koska sauvan sivupinnat ovat x-akselia suuntaisia, pätee niiden yksikkönormaalin $\mathbf{n}$ x-komponentille $n_x = 0.$ Ehdosta $\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{0}$ seuraa nyt

$$\left.\begin{aligned} t_x &\equiv \overbrace{n_x}^{0}\sigma_x + n_y\tau_{xy} + n_z\tau_{xz} = 0 \\ t_y &\equiv \overbrace{n_x}^{0}\tau_{xy} + n_y\sigma_y + n_z\overbrace{\tau_{yz}}^{0} = 0 \\ t_z &\equiv \overbrace{n_x}^{0}\tau_{xz} + n_y\overbrace{\tau_{yz}}^{0} + n_z\sigma_z = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} & n_y\tau_{xy} + n_z\tau_{xz} = 0, \\ & \sigma_y = 0, \\ & \sigma_z = 0. \end{aligned}\right.$$

Näin päädyimme sauvan sivupinnalla tulokseen $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$. Yhtälöryhmän ensimmäinen yhtälö ilmaisee reunaehdon, jonka leikkausjännitysten τ_{xy} ja τ_{xz} tulee toteuttaan sauvan sivupinnalla. Koska sauvan sivupinnoilla siis on voimassa $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$ ja sauva on hoikka, voidaan myös sauvan sisäpisteissä likimain otaksua, että $\sigma_y \approx \sigma_z \approx \tau_{yz} \approx 0$.

Ratkaistaan varsinainen tehtävä:

Nyt jännitysmatriisi on

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

joten saadaan

$$I_1 = \sigma_x + 0 + 0 = \sigma_x,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & 0 \end{vmatrix} = -\tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \sigma_x \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \tau_{xy} \begin{vmatrix} \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xz} & 0 \end{vmatrix} + \tau_{xz} \begin{vmatrix} \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xz} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ja

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \;\Rightarrow\; \sigma^3 - \sigma_x\sigma^2 - (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)\sigma = 0$$

$$\Rightarrow\; (\sigma^2 - \sigma_x\sigma - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2)\sigma = 0 \;\Rightarrow\; \sigma^2 - \sigma_x\sigma - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 = 0,\; \sigma = 0$$

$$\Rightarrow\; \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2},\; \sigma_3 = 0 \Rightarrow\; \sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}),\; \sigma_3 = 0,$$

missä $\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$. Koska on voimassa $\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} \geq \sigma_x$, saadaanpääjännityksille

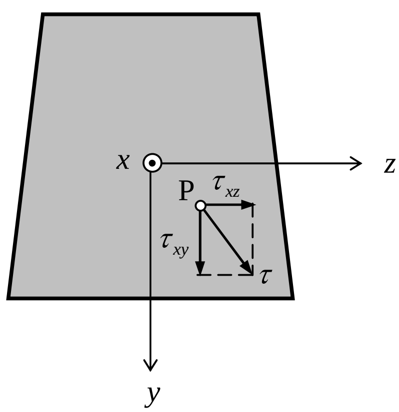
$$\underline{\underline{\sigma_I = \sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}),\; \sigma_{II} = \sigma_3 = 0,\; \sigma_{III} = \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2})}}$$

sekä suurimmalle leikkausjännitykselle

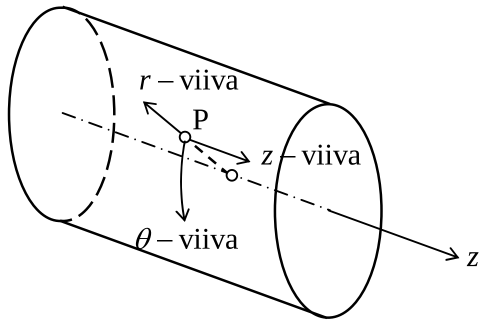
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\sigma_x + \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2})]$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}}}.$$

Oheinen kuva havainnollistaa poikkipinnan resultoivan leikkausjännityksen τ merkitystä



Tehtävä 2.12:



Ympyräsylinterin muotoista sauvaa vedetään, taivutetaan ja väännetään siten, että jännitykset tarkasteltavassa pisteessä P sylinterin pinnalla ovat

$$\sigma_r = 0,\ \sigma_\theta = 0,\ \sigma_z = 1\text{MPa},\ \tau_{r\theta} = 0,\ \tau_{\theta z} = 2\text{MPa},\ \tau_{zr} = 0.$$

Mitkä ovat pääjännitykset ja suurin leikkausjännitys tässä pisteessä.

Ratkaisu:

Tehtävässä on annettu tarkasteltavan pisteen jännityskomponentit sylinterikoordinaatistossa. Pääjännitysten määrittäminen tässä tapauksessa tapahtuu aivan samaan tapaan kuin karteesisessa koordinatistossa. Erona on vain se, että jännitystensorin ja yksikkönormaalin komponentit on ilmaistu sylinterikoordinaatistossa, ts.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{zr} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{\theta z} & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \{n\} = \begin{Bmatrix} n_r \\ n_\theta \\ n_z \end{Bmatrix}.$$

Ominaisarvotehtävä pääjännitysten määrittämiseksi on siis

$$\det([\sigma] - \sigma[I]) = 0 \iff \sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0,$$

missä nyt on

$$I_1 = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z,\ I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{\theta z} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_z & \tau_{zr} \\ \tau_{zr} & \sigma_r \end{vmatrix},\ I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{zr} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta & \sigma_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{\theta z} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

Saadaan

$$I_1 = 0 + 0 + 1 = 1\text{MPa},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 + 0 = -4\text{MPa},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

joten yhtälöksi tulee

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \;\Rightarrow\; \sigma^3 - \sigma - 4\sigma = 0 \;\Rightarrow\; (\sigma^2 - \sigma - 4)\sigma = 0$$

$$\Rightarrow\; \sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 4} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{17}),\; \sigma_3 = 0$$

$$\Rightarrow\; \sigma_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{17}),\; \sigma_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{17}),\; \sigma_3 = 0.$$

Pääjännitykset suuruusjärjestyksessä:

$$\sigma_I = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{17}) \approx 2{,}562\text{MPa}, \quad \sigma_{II} = 0, \quad \sigma_{III} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{17}) \approx -1{,}562\text{MPa}.$$

Suurin leikkausjännitys ja sitä vastaava normaalijännitys:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{17}) - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{17})] = \frac{\sqrt{17}}{2} \approx \underline{\underline{2{,}062\text{MPa}}},$$

$$\sigma_\tau = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{17}) + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{17})] = \frac{1}{2} \approx \underline{\underline{0{,}5\text{MPa}}}.$$

Koska tarkasteltavan pisteen P nollasta eroavat jännityskomponentit σ_z ja $\tau_{\theta z}$ vaikuttavat samassa, ko. pisteen kautta kulkevan θ-viivan ja z-viivan määrittelemässä tasossa, ja koska $\sigma_r = 0$, on kysymyksessä **tasojännitystila**. Voimme ratkaista tehtävän myös käyttäen tasojännitystilan kaavoja tai Mohrin ympyrää. Ajatellaan vaikkapa karteesinen $x, y, z-$koordinaatisto asetetuksi tarkasteltavaan pisteeseen siten, että x-akseli sivuaa θ-viivaa, y-akseli sivuaa z-viivaa ja $z-$akseli sivuaa $r-$viivaa. Tällöin on

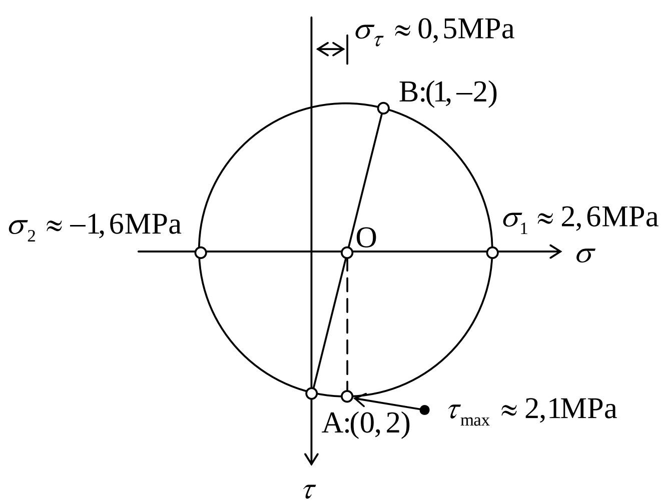
$$\sigma_x = \sigma_\theta = 0,\; \tau_{xy} = \tau_{\theta z} = 2\text{MPa},\; \sigma_y = \sigma_z = 1\text{MPa},\; \sigma_z = \sigma_r = 0.$$

Nyt saadaan kaavasta (4-2.12)

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}} = \frac{1}{2}(0+1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(0-1)^2 + 4\cdot 4} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{17})$$

$$\Rightarrow\; \sigma_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{17}),\; \sigma_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{17}),\; \sigma_3 = \sigma_z = 0.$$

Mohrin ympyrää käyttäen saadaan vastaavasti



Tehtävä 2.13:

Jännityskomponentit pitkässä ympyräsylinterin muotoisessa kappaleessa, jonka säde on a ja x – akseli yhtyy sylinterin akseliin, ovat

$$\tau_{xy} = -G\theta z,\ \tau_{xz} = G\theta y,$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0.$$

missä G on leikkausmoduuli ja θ on vääntymä, jotka ovat vakioita. (a) Osoita, että jännityskomponentit toteuttavat tasapainoyhtälöt, kun tilavuusvoimia ei ole. (b) Osoita myös, että sylinterin reunapinta on jännityksetön (eli traktiovektori sylinterin reunapinnalla häviää).

Ratkaisu:

(a) Kun tilavuusvoimaa $\mathbf{f}$ ei ole, eli $f_x = f_y = f_z = 0$, jännityskomponenttien tasapainoyhtälöt ovat

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} = 0\,.$$

Osoitetaan, että ne toteutuvat:

$$\frac{\partial \overbrace{\sigma_x}^{0}}{\partial x} + \frac{\partial \overbrace{\tau_{xy}}^{-G\theta z}}{\partial y} + \frac{\partial \overbrace{\tau_{zx}}^{G\theta y}}{\partial z} = G\theta(-\frac{\overbrace{\partial z}^{0}}{\partial y} + \frac{\overbrace{\partial y}^{0}}{\partial z}) = 0,\ \text{OK}$$

$$\frac{\partial \overbrace{\tau_{xy}}^{-G\theta z}}{\partial x} + \frac{\partial \overbrace{\sigma_y}^{0}}{\partial y} + \frac{\partial \overbrace{\tau_{yz}}^{0}}{\partial z} = -G\theta\frac{\partial z}{\partial x} = 0,\ \text{OK}$$

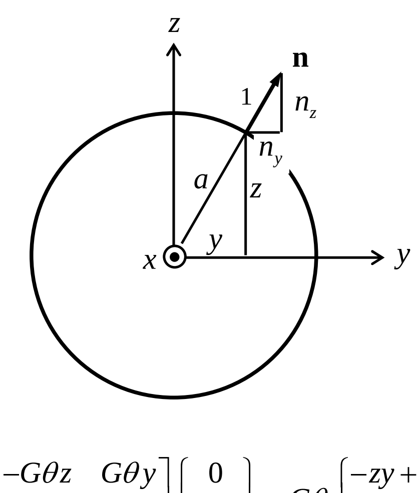
$$\frac{\partial \overbrace{\tau_{zx}}^{G\theta y}}{\partial x} + \frac{\partial \overbrace{\tau_{yz}}^{0}}{\partial y} + \frac{\partial \overbrace{\sigma_z}^{0}}{\partial z} = G\theta\frac{\partial y}{\partial x} = 0,\ \text{OK}$$

(b) Sylinteripinnan yksikkönormaalivektorin $\mathbf{n}$ komponentit:
Kuvion perusteella:

$$n_x = 0$$

$$\frac{n_y}{1} = \frac{y}{a} \Rightarrow n_y = \frac{y}{a}$$

$$\frac{n_z}{1} = \frac{z}{a} \Rightarrow n_z = \frac{z}{a}$$



Traktiovektori sylinteripinnalla:

$$\{t\}^{(n)} = [\sigma]\{n\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} t_x^{(n)} \\ t_y^{(n)} \\ t_z^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -G\theta z & G\theta y \\ -G\theta z & 0 & 0 \\ G\theta y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ y/a \\ z/a \end{Bmatrix} = \frac{G\theta}{a}\begin{Bmatrix} -zy + yz \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{0}}}$$

Tehtävä 2.14:

Kappaleen jännitystila karteesisessa x, y, z – koordinaatistossa on esitetty matriisina

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 3xy & 5y^2 & 0 \\ 5y^2 & 0 & 2z \\ 0 & 2z & 0 \end{bmatrix}.$$

Millaisen tilavuusvoiman $\mathbf{f}(x, y, z)$ tulisi vaikuttaa, että tasapaino vallitsisi kaikissa kappaleen pisteissä.

Ratkaisu:

Jännityskomponentit:

$\sigma_x = 3xy \;\; \tau_{xy} = \tau_{yx} = 5y^2, \;\; \tau_{yz} = \tau_{zy} = 2z,$ muut $= 0$

Tasapainoyhtälöistä seuraa:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0 \;\Rightarrow\; f_x = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}, \text{ jne.}$$

Saadaan:

$$f_x = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = -3y - 10y - 0 = \underline{-13y}$$

$$f_y = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -0 - 0 - 2 = \underline{-2}$$

$$f_z = -\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -0 - 0 - 0 = \underline{0}$$

Tilavuusvoimavektori:

$$\mathbf{f} = f_i \mathbf{e}_i = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k} = \underline{\underline{-13y\mathbf{i} + 2\mathbf{j}}}$$

Tehtävä 2.15:

(a) Tarkastellaan ohutta levyä, jossa vallitsee tasojännitystila. Jos sylinterikoordinaatisto asetetaan siten, että sen *z*-akseli on kohtisuorassa levyn tasoa vastaan, voidaan levyä tarkastella napakoordinaatistossa r, θ. Tällöin ainoat nollasta eroavat jännityskomponentit tulevat olemaan σ_r, σ_θ ja $\tau_{r\theta} (= \tau_{\theta r})$ ja ne voidaan otaksua pelkästään r:n ja θ:n funktioiksi. Muodosta levyn jännityskomponenttien tasapainoyhtälöt napakoordinaatistossa lähtien yleisistä sylinterikoordinaatiston yhtälöistä.
(b) Tarkastellaan kolmidimensioista kappaletta, jonka on pyörähdyssymmetrinen. Tällöin kappaleeseen voidaan asettaa sylinterikoordinaatisto siten, että tässä koordinaatistossa kappaleen geometria ja materiaaliominaisuudet eivät riipu koodinaatista θ. Jos myös kappaletta rasittava kuormitus on pyörähdyssymmetrinen (ts. riippumaton koordinaatista θ), tulevat sen nollasta eroavat jännityskomponentit olemaan σ_r, σ_θ, σ_z ja $\tau_{rz} = (\tau_{zr})$ ja ne ovat pelkästään r:n ja z:n funktiota. Muodosta kappaleen jännityskomponenttien tasapainoyhtälöt tässä r, z-koordinaatistossa lähtien yleisistä sylinterikoordinaatiston yhtälöistä.

Ratkaisu:

(a) Saadaan

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \overbrace{\tau_{zr}}^{0}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + f_r = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \overbrace{\tau_{z\theta}}^{0}}{\partial z} + \frac{2}{r}\tau_{r\theta} + f_\theta = 0,$$

$$\frac{\partial \overbrace{\tau_{rz}}^{0}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \overbrace{\tau_{\theta z}}^{0}}{\partial \theta} + \frac{\partial \overbrace{\sigma_z}^{0}}{\partial z} + \frac{1}{r}\overbrace{\tau_{rz}}^{0} + \overbrace{f_z}^{0} = 0.$$

Tasojännitystilassa tilavuusvoima $\mathbf{f}$ on levyn keskitason suuntainen, joten $f_z = 0$.
Näin viimeisestä yhtälöstä seuraa $0 = 0$ ja tulos on

$$\underline{\underline{\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + f_r = 0,}}$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r}\tau_{r\theta} + f_\theta = 0.}}$$

(b) Saadaan

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\overbrace{\tau_{\theta r}}^{0}}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{zr}}{\partial z}+\frac{1}{r}(\sigma_r-\sigma_\theta)+f_r=0,$$

$$\frac{\overbrace{\partial\tau_{r\theta}}^{0}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\overbrace{\partial\sigma_\theta}^{0}}{\partial\theta}+\frac{\overbrace{\partial\tau_{z\theta}}^{0}}{\partial z}+\frac{2}{r}\overbrace{\tau_{r\theta}}^{0}+\overbrace{f_\theta}^{0}=0,$$

$$\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\overbrace{\tau_{\theta z}}^{0}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{1}{r}\tau_{rz}+f_z=0.$$

Pyörähdyssymmetrisen kuormituksen tapauksessa tilavuusvoimalla ei voi olla $\theta-$viivan suuntaista komponenttia, eli $f_\theta=0$. Näin keskimmäisestä yhtälöstä seuraa $0=0$ ja muut saavat muodon

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{1}{r}(\sigma_r-\sigma_\theta)+f_r=0,$$

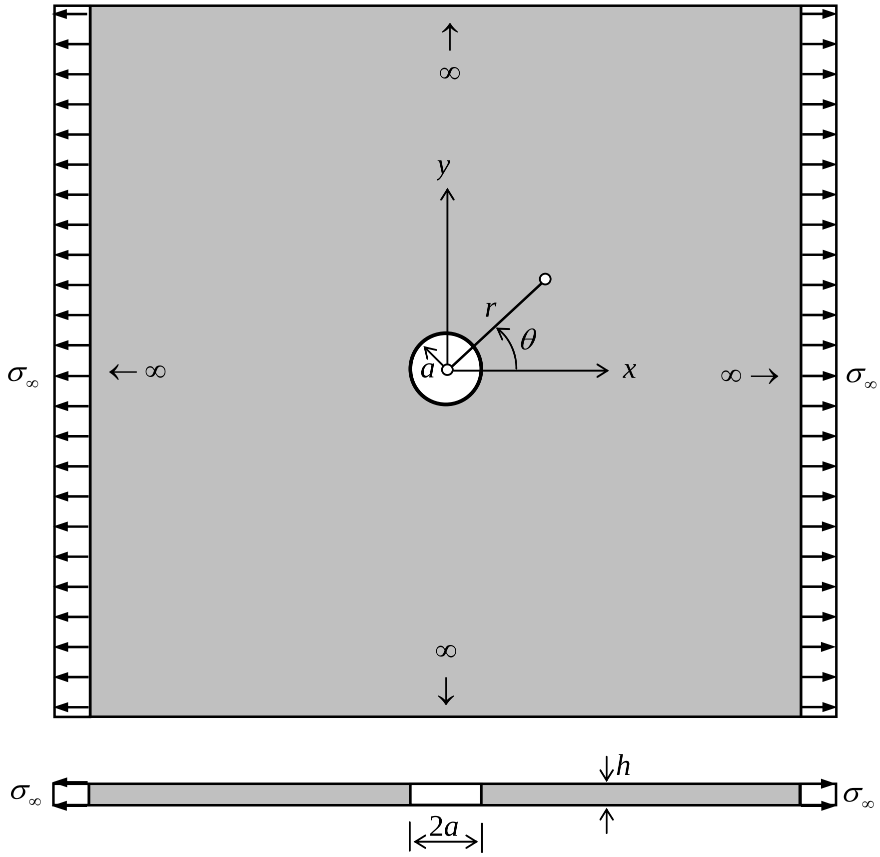
$$\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{1}{r}\tau_{rz}+f_z=0.$$

Kertomalla yhtälöt puolittain *r*:llä ja soveltamalla vielä tulon derivointia takaperin saadaan muoto

$$\underline{\underline{\frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r}+\frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial z}+\sigma_\theta+rf_r=0,}}$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r}+\frac{\partial(r\sigma_z)}{\partial z}+rf_z=0.}}$$

Tehtävä 2.16:



Tarkastellaan levyä, jossa on ympyrän muotoinen reikä ja johon vaikuttaa tasan jakautunut, vetävä kuorma $\sigma_\infty = \text{vakio}$ levyn päissä. Tiedetään että, jos levy on tehty lineaarisesti kimmoisesta aineesta, ja sen säde *a* on pieni levyn sivumittoihin nähden, käyttökelpoinen ratkaisu levyn jännityksille on

$$\sigma_r = \frac{\sigma_\infty}{2}(1-\frac{a^2}{r^2})[1+(1-3\frac{a^2}{r^2})\cos 2\theta],$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_\infty}{2}[1+\frac{a^2}{r^2}-(1+3\frac{a^4}{r^4})\cos 2\theta],$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_\infty}{2}(1-\frac{a^2}{r^2})(1+3\frac{a^2}{r^2})\sin 2\theta.$$

Ratkaisu perustuu olettamukseen, että levyn reunat ovat äärettömän etäällä reiästä. Osoita, että

(a) ratkaisu toteuttaa jännityskomponenttien tasapainoyhtälöt

(b) reiän reuna on jännityksetön: $\sigma_r = 0$ ja $\tau_{r\theta} = 0$

(c) äärettömän etäällä reiästä vallitsee jännitystila: $\sigma_x = \sigma_\infty$, $\sigma_y = 0$ ja $\tau_{xy} = 0$

Ratkaisu:

(a)
Jännityskomponenttien tasapainoyhtälöt sylinterikoordinaatistossa, tasojännitystilassa ($\sigma_z = \tau_{zr} = \tau_{z\theta} = 0$), kun tilavuusvoimia ei ole ($f_r = f_\theta = f_z = 0$) muokkautuvat seuraavasti:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \overbrace{\tau_{zr}}^{0}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + \overbrace{f_r}^{0} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \overbrace{\tau_{z\theta}}^{0}}{\partial z} + \frac{2}{r}\tau_{r\theta} + \overbrace{f_\theta}^{0} = 0,$$

$$\frac{\partial \overbrace{\tau_{rz}}^{0}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \overbrace{\tau_{\theta z}}^{0}}{\partial \theta} + \frac{\partial \overbrace{\sigma_z}^{0}}{\partial z} + \frac{1}{r}\overbrace{\tau_{rz}}^{0} + \overbrace{f_z}^{0} = 0,$$

joten kaksi ensimmäistä saavat muodon

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r}\tau_{r\theta} = 0$$

ja kolmas toteutuu identtisesti.
Derivoidaan:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_\infty}{2}\{2\frac{a^2}{r^3}[1+(1-3\frac{a^2}{r^2})\cos 2\theta] + (1-\frac{a^2}{r^2})\cdot 6\frac{a^2}{r^3}\cos 2\theta\} = \underline{\sigma_\infty \frac{a^2}{r^3}[1+(4-6\frac{a^2}{r^2})\cos 2\theta]}$$

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = -\frac{\sigma_\infty}{2}(1+3\frac{a^4}{r^4})(-2\sin 2\theta) = \underline{\sigma_\infty(1+3\frac{a^4}{r^4})\sin 2\theta}$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} = -\frac{\sigma_\infty}{2}[2\frac{a^2}{r^3}(1+3\frac{a^2}{r^2})\sin 2\theta + (1-\frac{a^2}{r^2})\cdot(-6)\frac{a^2}{r^3}\sin 2\theta] = \underline{\sigma_\infty \frac{a^2}{r^3}(2-6\frac{a^2}{r^2})\sin 2\theta}$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} = -\frac{\sigma_\infty}{2}(1-\frac{a^2}{r^2})(1+3\frac{a^2}{r^2})2\cos 2\theta = \underline{-\sigma_\infty(1-\frac{a^2}{r^2})(1+3\frac{a^2}{r^2})\cos 2\theta}$$

Muokataan normaalijännitysten erotusta:

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{\sigma_\infty}{2}[1-\frac{a^2}{r^2} + (1-3\frac{a^2}{r^2} - \frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4})\cos 2\theta - 1 - \frac{a^2}{r^2} + (1+3\frac{a^4}{r^4})\cos\theta]$$

$$= \underline{\sigma_\infty[-\frac{a^2}{r^2} + (1-2\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4})\cos 2\theta]}$$

Muokataan 1. jännityskomponenttien tasapainoyhtälön vasenta puolta:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = \sigma_\infty \frac{a^2}{r^3}[1+(4-6\frac{a^2}{r^2})\cos 2\theta]$$

$$-\frac{\sigma_\infty}{r}(1-\frac{a^2}{r^2})(1+3\frac{a^2}{r^2})\cos 2\theta + \frac{\sigma_\infty}{r}[-\frac{a^2}{r^2} + (1-2\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4})\cos 2\theta]$$

$$= \frac{\sigma_\infty}{r}[\frac{a^2}{r^2} - \frac{a^2}{r^2} + (4\frac{a^2}{r^2} - 6\frac{a^4}{r^4} - 1 - 2\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4} + 1 - 2\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4})\cos 2\theta]$$

$$\underline{\underline{= 0,\ \text{OK}}}.$$

1. jännityskomponenttien tasapainoyhtälö toteutui.

Muokataan 2. jännityskomponenttien tasapainoyhtälön vasenta puolta:

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r}\tau_{r\theta}$$

$$= \sigma_\infty \frac{a^2}{r^3}(2 - 6\frac{a^2}{r^2})\sin 2\theta + \frac{\sigma_\infty}{r}(1 + 3\frac{a^4}{r^4})\sin 2\theta + \frac{2}{r}(-\frac{\sigma_\infty}{2})(1 - \frac{a^2}{r^2})(1 + 3\frac{a^2}{r^2})\sin 2\theta$$

$$= \frac{\sigma_\infty}{r}(2\frac{a^2}{r^2} - 6\frac{a^4}{r^4} + 1 + 3\frac{a^4}{r^4} - 1 - 2\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4})\sin 2\theta$$

$$= \underline{\underline{0,\ \text{OK}}}.$$

2. jännityskomponenttien tasapainoyhtälö toteutui.

(b)
Reiän reunalla saadaan:

$$\sigma_r(a,\theta) = \frac{\sigma_\infty}{2}(1-1)[1 + (1 - 3\cdot 1)\cos 2\theta] = \underline{\underline{0,\ \text{OK}}}.$$

$$\tau_{r\theta}(a,\theta) = -\frac{\sigma_\infty}{2}(1-1)(1 + 3\cdot 1)\sin 2\theta = \underline{\underline{0,\ \text{OK}}}.$$

(c)
Äärettömän etäällä reiästä $r \to \infty$ jännityskomponenteille σ_r, σ_θ ja $\tau_{r\theta}$ saadaan

$$\sigma_r(\infty,\theta) = \frac{\sigma_\infty}{2}(1 - \overbrace{\frac{a^2}{r^2}}^{0})[1 + (1 - 3\overbrace{\frac{a^2}{r^2}}^{0})\cos 2\theta] = \frac{\sigma_\infty}{2}(1 + \cos 2\theta) = \sigma_\infty \cos^2\theta,$$

$$\sigma_\theta(\infty,\theta) = \frac{\sigma_\infty}{2}[1 + \overbrace{\frac{a^2}{r^2}}^{0} - (1 - 3\overbrace{\frac{a^4}{r^4}}^{0})\cos 2\theta] = \frac{\sigma_\infty}{2}(1 - \cos 2\theta) = \sigma_\infty \sin^2\theta,$$

$$\tau_{r\theta}(\infty,\theta) = -\frac{\sigma_\infty}{2}(1 - \overbrace{\frac{a^2}{r^2}}^{0})(1 + 3\overbrace{\frac{a^2}{r^2}}^{0})\sin 2\theta = -\frac{\sigma_\infty}{2}\sin 2\theta = -\sigma_\infty \sin\theta\cos\theta.$$

$$-\frac{\sigma_\infty}{2}\sin 2\theta = -\sigma_\infty \sin\theta\cos\theta$$

Johdetaan jännityskomponenttien σ_x, σ_y ja τ_{xy} sekä σ_r, σ_θ ja $\tau_{r\theta}$ väliset kaavat:

$$[\sigma] = [L]^T[\sigma'][L] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_r\cos\theta - \tau_{r\theta}\sin\theta & \sigma_r\sin\theta + \tau_{r\theta}\cos\theta \\ \tau_{r\theta}\cos\theta - \sigma_\theta\sin\theta & \tau_{r\theta}\sin\theta + \sigma_\theta\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_r\cos^2\theta - 2\tau_{r\theta}\sin\theta\cos\theta + \sigma_\theta\sin^2\theta & (\sigma_r - \sigma_\theta)\sin\theta\cos\theta + \tau_{r\theta}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ (\sigma_r - \sigma_\theta)\sin\theta\cos\theta + \tau_{r\theta}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) & \sigma_r\sin^2\theta + \tau_{r\theta}\sin\theta\cos\theta + \sigma_\theta\cos^2\theta \end{bmatrix}$$

$$\sigma_x = \sigma_r\cos^2\theta - 2\tau_{r\theta}\sin\theta\cos\theta + \sigma_\theta\sin^2\theta$$

$$= \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2}\overbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}^{1} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}\overbrace{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}^{\cos 2\theta} - \tau_{r\theta}\overbrace{2\sin\theta\cos\theta}^{\sin 2\theta}$$

$$= \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}\cos 2\theta - \tau_{r\theta}\sin 2\theta$$

$$\sigma_y = \sigma_r \sin^2\theta + \tau_{r\theta}\sin\theta\cos\theta + \sigma_\theta\cos^2\theta$$

$$= \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2}(\overbrace{\sin^2\theta + \cos^2\theta}^{1}) + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}(\overbrace{\sin^2\theta - \cos^2\theta}^{-\cos 2\theta}) + \tau_{r\theta}\overbrace{2\sin\theta\cos\theta}^{\sin 2\theta}$$

$$= \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}\cos 2\theta + \tau_{r\theta}\sin 2\theta$$

$$\tau_{xy} = (\sigma_r - \sigma_\theta)\sin\theta\cos\theta + \tau_{r\theta}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$= \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}\sin 2\theta + \tau_{r\theta}\cos 2\theta$$

Jännityskomponenteille σ_x, σ_y ja τ_{xy} kaukana $r \to \infty$ reiästä saadaan

$$\sigma_x(\infty,\theta) = \sigma_r(\infty,\theta)\cos^2\theta + \sigma_\theta(\infty,\theta)\sin^2\theta - 2\tau_{r\theta}(\infty,\theta)\sin\theta\cos\theta$$

$$= \sigma_\infty\cos^4\theta + \sigma_\infty\sin^4\theta + 2\sigma_\infty\sin^2\theta\cos^2\theta = \sigma_\infty(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2$$

$$= \underline{\underline{\sigma_\infty}}.$$

$$\sigma_y(\infty,\theta) = \sigma_r(\infty,\theta)\sin^2\theta + \sigma_\theta(\infty,\theta)\cos^2\theta + 2\tau_{r\theta}(\infty,\theta)\sin\theta\cos\theta$$

$$= \sigma_\infty\cos^2\theta\sin^2\theta + \sigma_\infty\sin^2\theta\cos^2\theta - 2\sigma_\infty\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$= \underline{\underline{0}}.$$

$$\tau_{xy}(\infty,\theta) = [\sigma_r(\infty,\theta) - \sigma_\theta(\infty,\theta)]\sin\theta\cos\theta + \tau_{r\theta}(\infty,\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$= (\sigma_\infty\cos^2\theta - \sigma_\infty\sin^2\theta)\sin\theta\cos\theta - \sigma_\infty\sin\theta\sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$= \underline{\underline{0}}.$$

Voidaan päätellä, että mitä pienempi reikä levyssä on, sitä paremmin annettu ratkaisu on voimassa.

Tehtävä 2.17:

Tarkastellaan edellisen tehtävän levyä, jossa on ympyränmuotoinen reikä.

(a) Määritä sen pisteen asema, jossa normaalijännitys σ_θ saa suurimman arvonsa.

(b) Määritä koko levyn suurin leikkausjännitys $\tau_{r\theta}$.

(c) Määritä koko levyn suurin pääjännitys $\sigma_{\max}$.

(d) Määritä koko levyn suurin leikkausjännitys $\tau_{\max}$.

(e) Piirrä normaalijännityksen σ_x jakaumat $x-$ ja $y-$akseleilla.

Huomautus: Havaitaan, että maksimijännitys kasvaa reikää lähestyttäessä. Tätä ilmiötä kutsutaan *jännitysten keskittymiseksi*.

Ratkaisu:

(a)
Lauseke $\cos 2\theta$ saa pienimmän arvonsa -1, kun $\theta = \pm\pi/2$, eli *y*-akselilla. Tällöin

$$\sigma_\theta(r, \pm\frac{\pi}{2}) = \frac{\sigma_\infty}{2}[1 + \frac{a^2}{r^2} - (1 + 3\frac{a^4}{r^4})\overbrace{\cos\pi}^{-1}] = \frac{\sigma_\infty}{2}(2 + \frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4}).$$

Suurin arvo saavutetaan, kun *r* on mahdollisimman pieni eli $r = a$ ja se on

$$\sigma_{\theta,\max} = \sigma_\theta(a, \pm\frac{\pi}{2}) = \frac{\sigma_\infty}{2}(2 + 1 + 3\cdot 1) = \underline{\underline{3\sigma_\infty}}.$$

Normaalijännitys σ_θ saa siis suurimman arvonsa $3\sigma_\infty$ reiän reunan ylimmässä ja alimmassa pisteessä.

(b)
Lauseke $\sin 2\theta$ saa itseisarvoltaan suurimman arvonsa ± 1, kun $\theta = \pm\pi/4$ tai $\pm 3\pi/4$, eli origon kautta kulkevilla suorilla, jotka muodostavat $45°$ kulman vaakatason kanssa. Tällöin

$$\tau_{r\theta} = \pm\frac{\sigma_\infty}{2}(1 - \frac{a^2}{r^2})(1 + 3\frac{a^2}{r^2})$$

ja, kun $r \geq a$ oikean puoleinen lauseke ilman etumerkkejä on aina positiivinen. Näin voidaan kirjoittaa

$$|\tau_{r\theta}| = \frac{\sigma_\infty}{2}(1 - \frac{a^2}{r^2})(1 + 3\frac{a^2}{r^2}) = \frac{\sigma_\infty}{2}(1 + 2\frac{a^2}{r^2} - 3\frac{a^4}{r^4}).$$

Saadaan

$$\frac{\partial|\tau_{r\theta}|}{\partial r} = \frac{\sigma_\infty}{2}(-4\frac{a^2}{r^3} + 12\frac{a^4}{r^5}) = 0 \;\Rightarrow\; r^2 = 3 \;\Rightarrow\; r = a\sqrt{3}.$$

ja

$$|\tau_{r\theta}|_{\max} = \frac{\sigma_\infty}{2}(1 + 2\cdot\frac{1}{3} - 3\cdot\frac{1}{9}) = \underline{\underline{\frac{2}{3}\sigma_\infty}}.$$

(c)
Kun $\theta = \pm\pi/2$, $\sin 2\theta = 0$ ja $\tau_{r\theta} = 0$. Täten *y*-akselilla σ_r ja σ_θ ovat pääjännityksia. Normaalijännitykselle σ_r *y*-akselilla saadaan

$$\sigma_r(r,\pm\frac{\pi}{2}) = \frac{\sigma_\infty}{2}(1-\frac{a^2}{r^2})[1+(1-3\frac{a^2}{r^2})\overbrace{\cos\pi}^{-1}] = \frac{3\sigma_\infty}{2}\frac{a^2}{r^2}(1-\frac{a^2}{r^2}).$$

Tämä on positiivinen. Se saa suurimman arvonsa, kun $r = a\sqrt{2}$ (tämä voidaan helposti osoittaa määrittämällä ääriarvo, kuten edellä) ja tämä arvo on

$$\sigma_r(a\sqrt{2},\pm\frac{\pi}{2}) = \frac{3\sigma_\infty}{8}(<\sigma_{\theta,\max} = 3\sigma_\infty).$$

Näin edellä saatu suurin σ_θ :arvo on myös suurin pääjännitys y-akselilla, ts.

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\theta,\max} = \underline{\underline{3\sigma_\infty}}.$$

Tämä on myös suurin pääjännitys koko levyssä, vaikkakaan asiaa ei tässä tämän tarkemmin todistella.

(d)
Koska $\sigma_{\max} = 3\sigma_\infty$ on y-akselilla kohdassa $r = a$ mahdollisimman suuri ja $\sigma_{\min} = \sigma_r = 0$ taas ko. kohdassa mahdollisimman pieni, nähdään, että

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max}-\sigma_{\min}}{2} = \frac{3\sigma_\infty - 0}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{2}\sigma_\infty}}$$

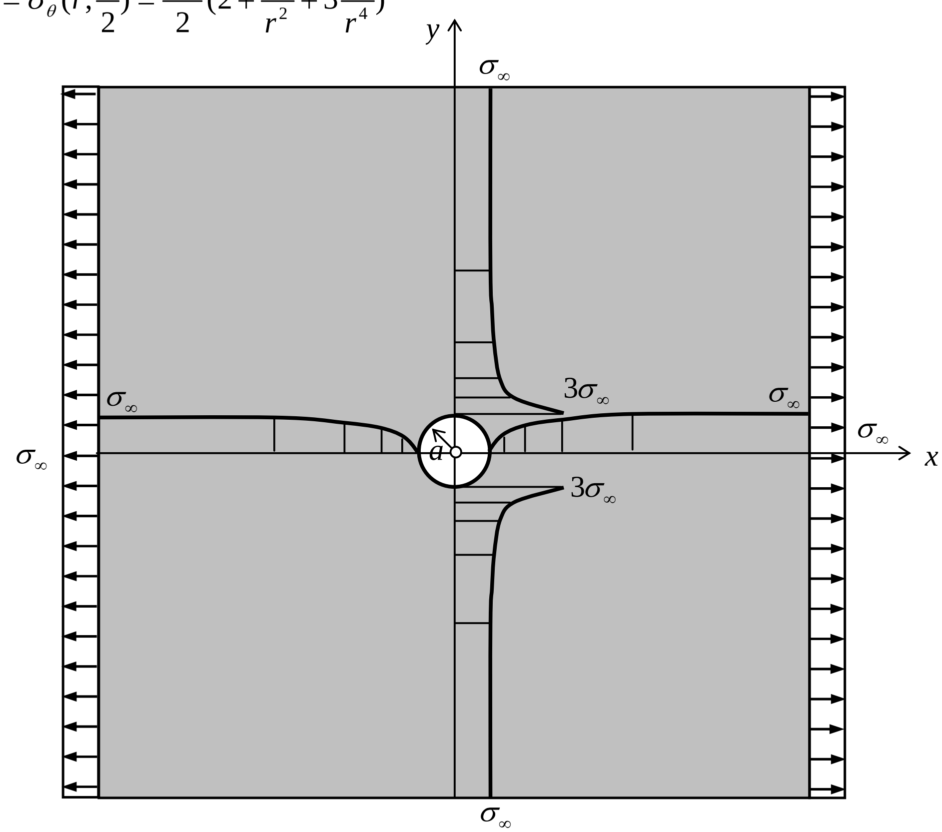
on suurin leikkausjännitys koko levyssä.

(e)
Havaitaan, että

$$x-\text{akselilla: } \sigma_x = \sigma_r(r,0) = \frac{\sigma_\infty}{2}(1-\frac{a^2}{r^2})(2-3\frac{a^2}{r^2})$$

$$y-\text{akselilla: } \sigma_x = \sigma_\theta(r,\frac{\pi}{2}) = \frac{\sigma_\infty}{2}(2+\frac{a^2}{r^2}+3\frac{a^4}{r^4})$$

Kuvaajat:

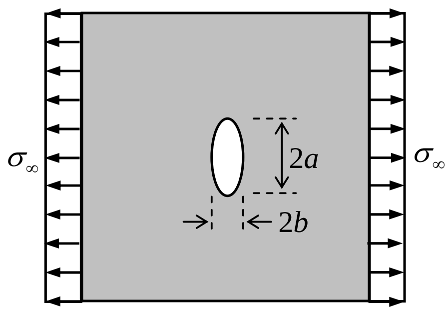


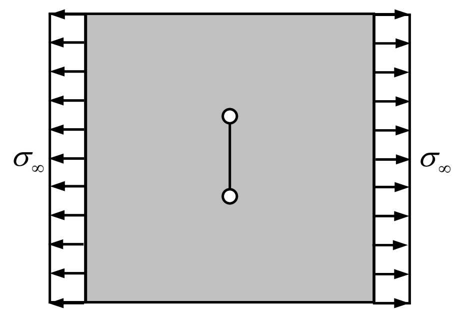
Tehtävä 2.18:

Lentokoneiden sivuikkunat aiheuttavat jännityskeskittymiä. Kuvittele, että joudut suunnittelemaan ikkunat, joista matkustajat voivat katsella ulos koneesta. Auttaaksemme sinua tehtävässäsi tarkastelemme idealisoitua probleemaa, jossa vetojännityksen σ_∞ rasittamassa äärettömässä alumiinilevyssä on ellipsin muotoinen reikä, jonka pienempi pääakseli on vetojännityksen suuntainen. Tälle probleemalle on löydetty analyyttinen ratkaisu, jonka mukaan vetojännitys levyssä reiän suuremman pääakselin päiden kohdalla on

$$\sigma_{\max} = \sigma_\infty (1 + 2\frac{a}{b})$$

missä 2*a* ja *2b* ovat suuremman ja pienemmän pääakselin pituudet. Mitä opit tästä tuloksesta?
Säröä lentokoneen sivussa voidaan kuvata pitkänomaisena elliptisenä reikänä. Miksi on vaarallista, jos särö on kohtisuorassa vetojännityksen suuntaa vastaan? Selitä, mitä etua voidaan saavuttaa poraamalla reiät särön päihin? Auttavatko reiät pysäyttämään särön leviämisen?





Ratkaisu:

Särö voidaan ajatella ellipsin muotoiseksi reiäksi, jonka pienemmän pääakselin pituus 2*b* lähestyy nollaa., ts. $b \to 0$. Tällöin särön kärjen kohdalla oleva vetojännitys $\sigma_{\max}$ lähestyy annetun kaavan mukaan ääretöntä. Tästä syystä on ilmeistä, että särö etenee ja koko levy repeää. Edellisen tehtävän tuloksen perusteella suurin jännitys vedetyssä levyssä, jossa on pieni ympyrän muotoinen reikä, on $\sigma_{\max} = 3\sigma_\infty$. Tämä on äärellinen, vaikkakin jännitysten keskittymistä tapahtuu. Jos särön päihin porataan reiät, jäävät jännityskeskittymän suurimmat jännitykset äärelliseksi. Suurin jännitys on ylemmän reiän reunan ylimmässä ja alemman reiän reunan alimmassa pisteessä (kuva). Niiden suuruus on luonnollisesti arvoa $3\sigma_\infty$ suurempi ja voidaan määrittää numeerisesti käyttäen esimerkiksi elementtimenetelmää (finite element method, FEM).

3. Muodonmuutostila

Tehtävä 3.1:

Sauvan pituus alkutilassa on 1m ja lopputilassa (a) 2m ja (b) 1,01m. Määritä insinöörivenymä ja Lagrangen venymä.

Ratkaisu:

(a) $\varepsilon_{\text{ins}} = \dfrac{L' - L}{L} = \dfrac{2-1}{1} = \underline{\underline{1}}, \quad \varepsilon_{\text{Lag}} = \dfrac{L' - L^2}{2L^2} = \dfrac{2^2 - 1}{2 \cdot 1^2} = \underline{\underline{1,5}}$

(b) $\varepsilon_{\text{ins}} = \dfrac{L' - L}{L} = \dfrac{1,01 - 1}{1} = \underline{\underline{0,01}}, \quad \varepsilon_{\text{Lag}} = \dfrac{L' - L^2}{2L^2} = \dfrac{1.01^2 - 1}{2 \cdot 1^2} = 0,01005 \approx \underline{\underline{0,01}}.$

Tehtävä 3.2:

Teräksinen putki, jonka pituus on 60cm, halkaisija 6cm, ja seinämän paksuus 0,12cm deformoituu siten, että se venyy 0,01cm akselin suunnassa, sen halkaisija kasvaa 0,001cm ja se vääntyy siten, että sen päiden väliseksi vääntökulmaeroksi tulee $1°$. Määritä muodonmuutoskomponentit putkessa.

Ratkaisu:

Käytetään sylinterikoordinaatistoa, jonka z-akseli yhtyy putken akseliin. Putken säde ja seinämän paksuus ovat $R = 3\text{cm}$ ja $h = 0{,}12\text{cm}$. Seinämän paksuuden suhde säteeseen: $h/R = 0{,}04$ on niin pieni, että tarkasteltavat suureet voidaan otaksua putken paksuussuunnassa vakioiksi, ts. ne eivät riipu koordinaatista r.

Putken pituuden muutoksesta $\Delta L = 0{,}01\text{cm}$ aiheutuva venymä on (infinitesimaalisten muodonmuutosten tapauksessa) sauvan suhteellinen pituuden muutos. Sille saadaan

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta L}{L} = \frac{0{,}01\text{cm}}{60\text{cm}} = 1{,}667 \cdot 10^{-4}$$

Putken halkaisijan kasvaessa $0{,}001\text{cm}$ sen säde kasvaa $\Delta R = 0{,}0005\text{cm}$. Ympyrän kaaren alkuperäinen ja uusi pituus ovat $2\pi R$ ja $2\pi(R + \Delta R)$ Vastaava venymä ε_θ on suhteellinen kaaren pituuden muutos, jolle saadaan

$$\varepsilon_\theta = \frac{2\pi(R + \Delta R) - 2\pi R}{2\pi R} = \frac{\Delta R}{R} = \frac{0{,}0005\text{cm}}{3\text{cm}} = 1{,}667 \cdot 10^{-4}$$

Putken päiden välistä vääntökulmaeroa $\Delta\varphi = 1° = \pi/180\text{rad}$ vastaava liukuma $\gamma_{\theta z}$ on se pieni kulma, joka verran putken keskipintaan alkutilassa piirretyn suorakaiteen suorat kulmat muuttuvat deformaatiossa. Sille saadaan oheisen kuvion perusteella

$$\gamma_{\theta z} = \frac{R\Delta\varphi}{L} = \frac{3\text{cm} \cdot \pi/180}{60\text{cm}} = 8{,}727 \cdot 10^{-4}$$

Näin putken nollasta eroaviksi muodonmuutoskomponenteiksi saatiin

$$\underline{\underline{\varepsilon_\theta = 1{,}667 \cdot 10^{-4}}},\ \underline{\underline{\varepsilon_z = 1{,}667 \cdot 10^{-4}}},\ \underline{\underline{\gamma_{\theta z} = 8{,}727 \cdot 10^{-4}}}$$

Tehtävä 3.3:

Kappaleen siirtymäkenttä on annettu lausekkeilla $u = kxy$, $v = kxy$ ja $w = 2k(x+y)z$, missä vakio $k(>0)$ on niin pieni, että infinitesimaalisten venymien teoria on voimassa. (a) Määritä infinitesimaaliset muodonmuutoskomponentit funktioina koordinaateista x, y ja z ja muodosta muodonmuutosmatriisi. (b) Määritä pisteessä (1,1,0) päävenymät, suurimman päävenymän suuntainen yksikkövektori ja suurin liukuma.

Ratkaisu:

(a) Muodonmuutoskomponentit:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = ky, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = kx, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 2k(x+y),$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = k(x+y), \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 2kz. \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 2kz$$

Muodonmuutosmatriisi:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ky & \frac{k}{2}(x+y) & kz \\ \frac{k}{2}(x+y) & kx & kz \\ kz & kz & 2k(x+y) \end{bmatrix}.$$

(b) Päävenymät pisteessä (1,1,0):

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} k & k & 0 \\ k & k & 0 \\ 0 & 0 & 4k \end{bmatrix}.$$

$$\det \begin{bmatrix} k-\varepsilon & k & 0 \\ k & k-\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 4k-\varepsilon \end{bmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ (k-\varepsilon)^2(4k-\varepsilon) - k^2(4k-\varepsilon) = 0$$

$$\Rightarrow \ (4k-\varepsilon)\varepsilon(\varepsilon-2k) = 0 \ \Rightarrow \ \varepsilon_1 = 4k, \ \varepsilon_2 = 0, \ \varepsilon_3 = 2k$$

$$\Rightarrow \ \varepsilon_I = 4k, \ \varepsilon_{II} = 2k, \ \varepsilon_{III} = 0$$

Suurimman päävenymän $\varepsilon_I = 4k$ suuntainen yksikkövektori:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x-\varepsilon_I & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y-\varepsilon_I & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z-\varepsilon_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} k-4k & k & 0 \\ k & k-4k & 0 \\ 0 & 0 & 4k-4k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -3k & k & 0 \\ k & -3k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3n_x + n_y = 0 \\ n_x - 3n_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_x = 0 \\ n_y = 0 \end{cases}$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \Rightarrow 2n_z^2 = 1 \Rightarrow n_z = 1 \Rightarrow n_x = 0,\ n_y = 0,\ n_z = 1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{n} = \mathbf{k}}}$$

Suurin liukuma:

$$\gamma_{\max} = \varepsilon_I - \varepsilon_{III} = 4k - 0 = \underline{\underline{4k}}$$

Tehtävä 3.4:

Määritä infinitesimaaliset muodonmuutoskomponenit ja muodon-muutosmatriisi siirtymäkentälle
$\mathbf{u} = (x-z)^2\,\mathbf{i} + (y-z)^2\,\mathbf{j} - xy\mathbf{k}$
pisteessä P: $(0,2,-1)$.

Ratkaisu:

Siirtymäkomponentit:
$u = (x-z)^2,\; v = (y-z)^2,\; w = -xy$
Osittaisderivaatat:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(x-z),\; \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\; \frac{\partial u}{\partial z} = -2(x-z),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0,\; \frac{\partial v}{\partial y} = 2(y-z),\; \frac{\partial v}{\partial z} = -2(y-z),$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -y,\; \frac{\partial w}{\partial y} = -x,\; \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Jälkimmäisten arvot pisteessä P: $(0,2,-1)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2,\; \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\; \frac{\partial u}{\partial z} = -2,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0,\; \frac{\partial v}{\partial y} = 6,\; \frac{\partial v}{\partial z} = -6,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -2,\; \frac{\partial w}{\partial y} = 0,\; \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Infinitesimaaliset venymät ja liukumat:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \underline{\underline{2}},\; \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 + 0 = \underline{\underline{0}},$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \underline{\underline{6}},\; \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -6 + 0 = \underline{\underline{-6}},$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \underline{\underline{0}},\; \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = -2 - 2 = \underline{\underline{-4}}.$$

Muodonmuutosmatriisi:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}}}$$

Tehtävä 3.5:

Päävenymien määrittäminen tasotapauksessa voidaan ilmaista ominaisarvotehtävänä

$([\varepsilon]-\varepsilon[I])\{n\}=\{0\}$,

missä

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix}\varepsilon_x & \dfrac{\gamma_{xy}}{2}\\ \dfrac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y\end{bmatrix},\quad [I]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad \{n\}=\begin{Bmatrix}n_x\\ n_y\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{Bmatrix}$$

ja $n_x^2+n_y^2=1$. Johda tämän tiedon perusteella päävenymille ja pääsuunnille seuraavat kaavat

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+\gamma_{xy}^2}\,,\quad \theta_i=\arctan\frac{\varepsilon_i-\varepsilon_x}{\gamma_{xy}/2},\ (i=1,2)\,.$$

Ratkaisu:

Päävenymät:

$$\begin{vmatrix}\varepsilon_x-\varepsilon & \dfrac{\gamma_{xy}}{2}\\ \dfrac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y-\varepsilon\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow\ (\varepsilon_x-\varepsilon)(\varepsilon_y-\varepsilon)-\frac{\gamma_{xy}^2}{4}=0$$

$$\Rightarrow\ \varepsilon^2-(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\varepsilon+\varepsilon_x\varepsilon_y-\frac{\gamma_{xy}^2}{4}=0$$

$$\Rightarrow\ \varepsilon_{1,2}=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}\pm\sqrt{\frac{(\varepsilon_x+\varepsilon_y)^2}{4}-\varepsilon_x\varepsilon_y+\frac{\gamma_{xy}^2}{4}}=\frac{1}{2}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\pm\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_x{}^2+\varepsilon_y{}^2+2\varepsilon_x\varepsilon_y-4\varepsilon_x\varepsilon_y+\gamma_{xy}^2}$$

$$=\frac{1}{2}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\pm\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_x{}^2+\varepsilon_y{}^2-2\varepsilon_x\varepsilon_y+\gamma_{xy}^2}=\underline{\underline{\frac{1}{2}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+\gamma_{xy}^2}\,.}}$$

Pääsuunnat:

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x-\varepsilon_i & \dfrac{\gamma_{xy}}{2}\\ \dfrac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y-\varepsilon_i\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos\theta_i\\ \sin\theta_i\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix},\ (i=1,2)$$

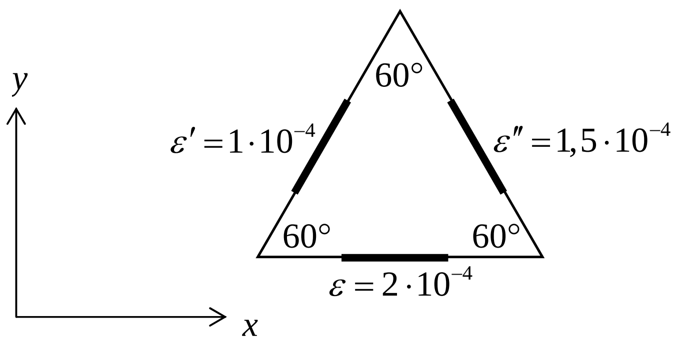
Ylemmästä yhtälöstä saadaan

$$(\varepsilon_x-\varepsilon_i)\cos\theta_i+\frac{\gamma_{xy}}{2}\sin\theta_i=0\ \Rightarrow\ \tan\theta_i=\frac{\varepsilon_i-\varepsilon_x}{\gamma_{xy}/2}$$

$$\Rightarrow\ \underline{\underline{\theta_i=\arctan\frac{\varepsilon_i-\varepsilon_x}{\gamma_{xy}/2},\ (i=1,2).}}$$

Tehtävä 3.6:

Niin sanottu delta-ruusuke, muodostuu kolmesta venymäliuskasta, jotka on kiinnitetty kappaleen pintaan tasasivuisen kolmion sivujen suuntaisesti. Mittaamalla venymäliuskojen venymät ε, ε' ja ε'' voidaan kappaleen pinnan suuntaiset venymäkomponentit ε_x, ε_y ja γ_{xy} määrittää. Määritä nämä oheisen kuvan delta-ruusukkeelle.



Ratkaisu:

Merkitään venymän suunnan $\mathbf{n}$ ja $x-$akselin välistä kulmaa θ, jolloin $n_x = \cos\theta$ ja $n_y = \sin\theta$, jolloin

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix}, \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \dfrac{\gamma_{xy}}{2} \\ \dfrac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y \end{bmatrix}$$

Venymälle suuntaan θ saadaan nyt lauseke

$$\varepsilon_\theta \equiv \varepsilon_n = \{n\}^T[\varepsilon]\{n\} = [\cos\theta, \sin\theta] \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \dfrac{\gamma_{xy}}{2} \\ \dfrac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix}$$

$$= [\cos\theta, \sin\theta] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \cos\theta + \dfrac{\gamma_{xy}}{2} \sin\theta \\ \dfrac{\gamma_{xy}}{2} \cos\theta + \varepsilon_y \sin\theta \end{Bmatrix} = \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy} \sin\theta\cos\theta.$$

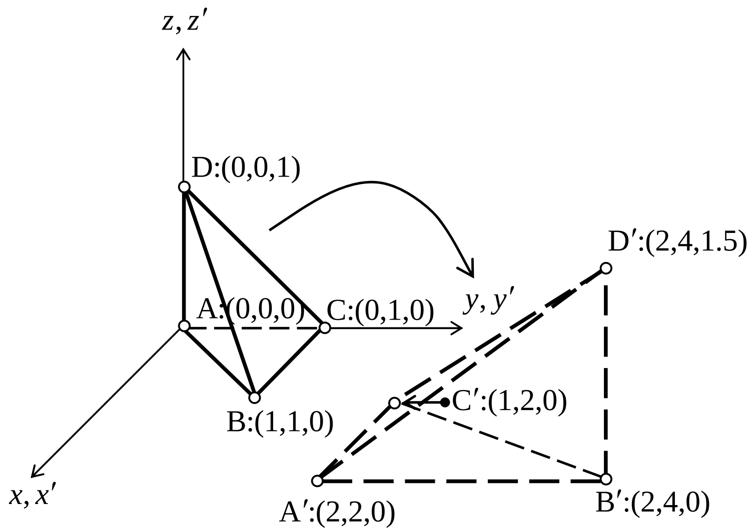
Sitä käyttäen saadaan

$$\begin{cases} \varepsilon_{0^\circ} \equiv \varepsilon_x \cos^2 0^\circ + \varepsilon_y \sin^2 0^\circ + \gamma_{xy} \sin 0^\circ \cos 0^\circ = \varepsilon \\ \varepsilon_{60^\circ} \equiv \varepsilon_x \cos^2 60^\circ + \varepsilon_y \sin^2 60^\circ + \gamma_{xy} \sin 60^\circ \cos 60^\circ = \varepsilon' \\ \varepsilon_{120^\circ} \equiv \varepsilon_x \cos^2 120^\circ + \varepsilon_y \sin^2 120^\circ + \gamma_{xy} \sin 120^\circ \cos 120^\circ = \varepsilon'' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon \\ \dfrac{1}{4}\varepsilon_x + \dfrac{3}{4}\varepsilon_y + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} = \varepsilon' \\ \dfrac{1}{4}\varepsilon_x + \dfrac{3}{4}\varepsilon_y - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} = \varepsilon'' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon = \underline{\underline{2\cdot 10^{-4}}} \\ \varepsilon_y = \dfrac{2}{3}\varepsilon'' + \dfrac{2}{3}\varepsilon' - \dfrac{1}{3}\varepsilon = (\dfrac{2}{3}\cdot 1{,}5 + \dfrac{2}{3}\cdot 1 - \dfrac{1}{3}\cdot 2)\cdot 10^{-4} = \underline{\underline{1\cdot 10^{-4}}} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}(\varepsilon' - \varepsilon'') = \dfrac{2}{\sqrt{3}}(1-1{,}5)\cdot 10^{-4} = \underline{\underline{-0{,}5774\cdot 10^{-4}}} \end{cases}$$

Tehtävä 3.7:



Kuvan tetraedrin muotoinen kappale deformoituu siten, että kärkipisteet A, B, C ja D siirtyvät pisteisiin A′, B′, C′ ja D′ sekä deformaation geometriakuvaus on tetraedrin alueella lineaarinen. Määritä siirtymät, Lagrangen muodonmuutos-komponentit ja vastaava muodonmuutosmatriisi.

Ratkaisu:

Geometriakuvauksella tarkoitetaan kuvausta, jolla funktiot $x' = x'(x, y, z)$, $y' = y'(x, y, z)$ ja $z' = z'(x, y, z)$ kuvaavat pisteen P:(x, y, z), jossa partikkeli on alkutilassa, pisteeksi P′:(x', y', z'), jossa sama partikkeli on lopputilassa. Koska tämä kuvaus on lineaarinen, näille funktioille otetaan esitykset

$$
\begin{aligned}
x' &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z,\\
y' &= b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 z,\\
z' &= c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 z,
\end{aligned}
$$

missä kertoimet $a_1,\ a_2, \cdots, b_1, \cdots$ ovat vakiota. Ne saadaan määritetyksi seuraavasti:

Vastinpisteiden x' – koordinaatit:

$$
\left.\begin{aligned}
x'(0,0,0) &\equiv a_1 + a_2\cdot 0 + a_3\cdot 0 + a_4\cdot 0 = 2\\
x'(1,1,0) &\equiv a_1 + a_2\cdot 1 + a_3\cdot 1 + a_4\cdot 0 = 2\\
x'(0,1,0) &\equiv a_1 + a_2\cdot 0 + a_3\cdot 1 + a_4\cdot 0 = 1\\
x'(0,0,1) &\equiv a_1 + a_2\cdot 0 + a_3\cdot 0 + a_4\cdot 1 = 2
\end{aligned}\right\}
\Rightarrow
\left\{\begin{aligned}
a_1 &= 2\\
a_1 + a_2 + a_3 &= 2\\
a_1 + a_3 &= 1\\
a_1 + a_4 &= 2
\end{aligned}\right.
\Rightarrow
\left\{\begin{aligned}
a_1 &= 2\\
a_2 &= 1\\
a_3 &= -1\\
a_4 &= 0
\end{aligned}\right.
$$

Vastinpisteiden y' – koordinaatit:

$$\left.\begin{aligned} y'(0,0,0) &\equiv b_1 + b_2 \cdot 0 + b_3 \cdot 0 + b_4 \cdot 0 = 2 \\ y'(1,1,0) &\equiv b_1 + b_2 \cdot 1 + b_3 \cdot 1 + b_4 \cdot 0 = 4 \\ y'(0,1,0) &\equiv b_1 + b_2 \cdot 0 + b_3 \cdot 1 + b_4 \cdot 0 = 2 \\ y'(0,0,1) &\equiv b_1 + b_2 \cdot 0 + b_3 \cdot 0 + b_4 \cdot 1 = 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 2 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 4 \\ b_1 + b_3 = 2 \\ b_1 + b_4 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 2 \\ b_2 = 2 \\ b_3 = 0 \\ b_4 = 2 \end{cases}$$

Vastinpisteiden z' – koordinaatit:

$$\left.\begin{aligned} z'(0,0,0) &\equiv c_1 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0 + c_4 \cdot 0 = 0 \\ z'(1,1,0) &\equiv c_1 + c_2 \cdot 1 + c_3 \cdot 1 + c_4 \cdot 0 = 0 \\ z'(0,1,0) &\equiv c_1 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 1 + c_4 \cdot 0 = 0 \\ z'(0,0,1) &\equiv c_1 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 1 + c_4 \cdot 1 = 1.5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_4 = 1.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = 1.5 \end{cases}$$

Saadaan

$$\begin{aligned} x' &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z = 2 + x - y \\ y' &= b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 z = 2 + 2x + 2z \\ z' &= c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 z = 1.5z \end{aligned}$$

Siirtymät:

$$\begin{aligned} u &= x' - x = 2 + x - y - x = \underline{\underline{2 - y}} \\ v &= y' - y = 2 + 2x + 2z - y = \underline{\underline{2 + 2x - y + 2z}} \\ w &= z' - z = 1.5z - z = \underline{\underline{0.5z}} \end{aligned}$$

Siirtymien derivaatat:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 2,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0.5$$

Venymät:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}[(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x})^2 + (\frac{\partial w}{\partial x})^2] = 0 + \frac{1}{2}(0 + 2^2 + 0) = \underline{\underline{2}}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}[(\frac{\partial u}{\partial y})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2 + (\frac{\partial w}{\partial y})^2] = -1 + \frac{1}{2}[(-1)^2 + (-1)^2 + 0] = \underline{\underline{0}}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}[(\frac{\partial u}{\partial z})^2 + (\frac{\partial v}{\partial z})^2 + (\frac{\partial w}{\partial z})^2] = 0.5 + \frac{1}{2}(0 + 2^2 + 0.5^2) = \underline{\underline{2.625}}$$

Liukumat:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} = -1 + 2 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = \underline{\underline{-1}}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} = 2 + 0 + (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 0.5 = \underline{\underline{0}}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} = 0 + 0 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 0.5 \cdot 0 = \underline{\underline{4}}$$

Muodonmuutosmatriisi:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & -0.5 & 2 \\ -0.5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2.625 \end{bmatrix}}}$$

Tehtävä 3.8:

Määritä tehtävän 3.7 muodonmuutostilan päävenymät ja niiden suunnat sekä suurimman päävenymän suuntainen yksikkövektori sekä suurin liukuma. Määritä myös suhteellinen tilavuudenmuutos.

Ratkaisu:

Päävenymät:

$$J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 2 + 0 + 2.625 = 4.625$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2.625 & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \varepsilon_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -0.5 \\ -0.5 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2.625 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2.625 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -0.25 + 0 + 1.25 = 1$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -0.5 & 2 \\ -0.5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2.625 \end{vmatrix} = -(-0.5)(-0.5)2.625 = -0.65625$$

$$Q = \frac{3J_2 - J_1^2}{9} = \frac{3 \cdot 1 - 4.625^2}{9} = -2.0434,$$

$$R = \frac{2J_1^3 + 27J_3 - 9J_1J_2}{54} = \frac{2 \cdot 4.625^3 + 27(-0.65625) - 9 \cdot 4.625 \cdot 1}{54} = 2.5652$$

$$D = Q^3 + R^2 = -2.0434^3 + 2.565^2 = 1.9530 < 0, \text{ OK.}$$

$$\varphi = \arccos \frac{R}{\sqrt{-Q^3}} = \arccos \frac{2.5625}{\sqrt{2.0434^3}} = 28.685$$

$$\varepsilon_1 = 2\sqrt{-Q}\cos(\frac{1}{3}\varphi) + \frac{J_1}{3} = 2\sqrt{2.0434}\cos(9.5617°) + \frac{4.625}{3} = 3.772$$

$$\varepsilon_2 = 2\sqrt{-Q}\cos(\frac{1}{3}\varphi + 120°) + \frac{J_1}{3} = 2\sqrt{2.0434}\cos(9.5617° + 120°) + \frac{4.625}{3} = 0.980$$

$$\varepsilon_3 = 2\sqrt{-Q}\cos(\frac{1}{3}\varphi + 240°) + \frac{J_1}{3} == 2\sqrt{2.0434}\cos(9.5617° + 120°) + \frac{4.625}{3} = 1.820$$

$$\varepsilon_I = \underline{\underline{3.772}}, \quad \varepsilon_{II} = \underline{\underline{1.820}}, \quad \varepsilon_{III} = \underline{\underline{0.980}}$$

Suurimman päävenymän suunta:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_I & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y - \varepsilon_I & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z - \varepsilon_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2-3.772 & -0.5 & 2 \\ -0.5 & -3.772 & 0 \\ 2 & 0 & 2.625-3.772 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1.772 & -0.5 & 2 \\ -0.5 & -3.772 & 0 \\ 2 & 0 & -1.147 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -0.5n_x - 3.772n_y = 0 \\ 2n_x - 1.147n_z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n_x = \dfrac{1.147}{2} n_z = 0.5735 n_z \\ n_y = -\dfrac{0.5}{3.772} n_x = -\dfrac{0.5}{3.772} \cdot 0.5735 n_z = -0.00760 n_z \end{cases}$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \Rightarrow [0.5735^2 + (-0.00760)^2 + 1] n_z^2 = 1 \Rightarrow n_z^2 = 0.75247 \Rightarrow n_z = 0.86745$$

$$n_x = 0.5735 \cdot 0.86745 = 0.4975,\ n_y = -0.00760 \cdot 0.86745 = 0.0066,\ n_z = 0.8675$$

$$\mathbf{n} = \underline{\underline{0.4975\mathbf{i} + 0.0066\mathbf{j} + 0.8675\mathbf{k}}}$$

Suurin liukuma: $\gamma_{\max} = \varepsilon_I - \varepsilon_{III} = 3.772 - 0.980 = \underline{\underline{2.792}}$

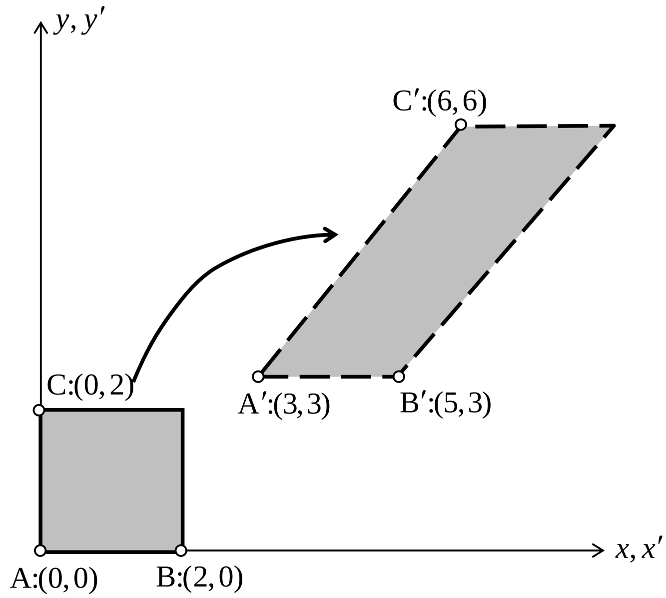
Suhteellinen tilavuudenmuutos:

$$\varepsilon_V = \begin{vmatrix} 1+\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 1+\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & 1+\frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} - 1 = \begin{vmatrix} 1+0 & 2 & 0 \\ -1 & 1-1 & 0 \\ 0 & 2 & 1+0.5 \end{vmatrix} - 1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1.5 \end{vmatrix} - 1$$

$$= -2 \cdot (-1) \cdot 1.5 - 1 = 3 - 1 = \underline{\underline{2}}$$

Tehtävä 3.9:

Kuvan neliön muotoinen levy deformoituu siten, että kärkipisteet A, B ja C siirtyvät pisteisiin A′, B′ ja C′ sekä deformaation geometriakuvaus on neliön alueella lineaarinen. Määritä siirtymät, Lagrangen muodonmuutoskomponentit, muodonmuutosmatriisi, päävenymät ($x, y -$ tasossa) ja niiden suuntakulmat.



Ratkaisu:

Määritetään ensin yhteydet $x' = x'(x, y)$ ja $y' = y'(x, y)$. Otetaan näille yhteyksille esitykset $x = a_1 + a_2 x + a_3 y, \quad y' = b_1 + b_2 x + b_3 y$.

Vastinpisteiden $x -$ koordinaatit:

$$\left.\begin{aligned} x'(0,0) &= a_1 + a_2 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 = 3 \\ x'(2,0) &= a_1 + a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 0 = 5 \\ x'(0,2) &= a_1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 2 = 6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_1 + 2a_2 &= 5 \\ a_1 + 2a_3 &= 6 \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= 1 \\ a_3 &= 1.5 \end{aligned}\right.$$

Vastinpisteiden $y -$ koordinaatit:

$$\left.\begin{aligned} y'(0,0) &= b_1 + b_2 \cdot 0 + b_3 \cdot 0 = 3 \\ y'(2,0) &= b_1 + b_2 \cdot 2 + b_3 \cdot 0 = 3 \\ y'(0,2) &= b_1 + b_2 \cdot 0 + b_3 \cdot 2 = 6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} b_1 &= 3 \\ b_1 + 2b_2 &= 3 \\ b_1 + 2b_3 &= 6 \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} b_1 &= 3 \\ b_2 &= 0 \\ b_3 &= 1.5 \end{aligned}\right.$$

Yhteydet $x' = x'(x, y)$ ja $y' = y'(x, y)$:

$$x' = 3 + x + 1.5y,$$

$$y' = 3 + 1.5y.$$

Siirtymät:

$$u = x' - x = 3 + x + 1.5y - x = \underline{\underline{3 + 1.5y}},$$

$$v = y' - y = 3 + 1.5y - y = \underline{\underline{3 + 0.5y}}.$$

Siirtymien osittaisderivaatat:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1.5,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0.5.$$

Venymät:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}[(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x})^2] = 0 + \frac{1}{2}(0+0) = \underline{\underline{0}}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}[(\frac{\partial u}{\partial y})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2] = 0.5 + \frac{1}{2}(1.5^2 + 0.5^2) = \underline{\underline{1.75}}$$

Liukuma:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = 1.5 + 0 + 0 \cdot 1.5 + 0 \cdot 0.5 = \underline{\underline{1.5}}$$

Muodonmuutosmatriisi:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \dfrac{\gamma_{xy}}{2} \\ \dfrac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 0.75 \\ 0.75 & 1.75 \end{bmatrix}}}$$

Päävenymät:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} = \frac{1}{2}(0 + 1.75) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(0 - 1.75)^2 + 1.5^2} = 0.875 \pm 1.152$$

$$\Rightarrow \ \varepsilon_1 = 2.027 \approx \underline{\underline{2.03}}, \ \varepsilon_2 = -0.277 \approx \underline{\underline{-0.28}}$$

Päävenymien suunnat:

$$\theta_1 = \arctan\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_x}{\gamma_{xy}/2} = \arctan\frac{2.027}{1.5/2} \approx \underline{\underline{69.7^\circ}}$$

$$\theta_2 = \arctan\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_x}{\gamma_{xy}/2} = \arctan\frac{-0.277}{1.5/2} \approx \underline{\underline{-20.3^\circ}}$$

Tehtävä 3.10:

Millä ehdolla seuraavat infinitesimaaliset venymäkomponentit ovat mahdollisia: $\varepsilon_x = \alpha z(x^2 + y^2)$, $\varepsilon_y = \alpha x^2 z$, $\gamma_{xy} = 2\beta xyz$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \varepsilon_z = 0$.

Ratkaisu:

Kompatibiliteettiyhtälöiden tulee toteutua. Koska $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \varepsilon_z = 0$, riittää kuin tarkastellaan tasotapauksen kompatibiliteettiyhtälöä.

Derivoidaan

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} = 2\alpha yz, \ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = 2\alpha z,$$

$$\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} = 2\alpha xy, \ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2\alpha z,$$

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} = 2\beta yz, \ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 2\beta z,$$

Sijoitetaan kompatibiliteettiyhtälöön:

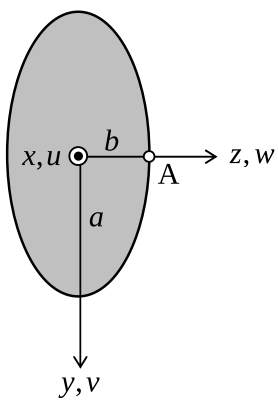
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \ \Rightarrow \ 2\alpha z + 2\alpha z = 2\beta z \ \Rightarrow \ (2\alpha - \beta)z = 0 \ \Rightarrow \ \underline{\underline{2\alpha = \beta}}$$

Tehtävä 3.11:

Terässauvan, jonka poikkileikkaus on ellipsin muotoinen, siirtymille on saatu lausekkeet

$$u = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\theta yz,\ v = -\theta xz,\ w = \theta xy,$$

missä θ on ns. vääntymä eli vääntökulma sauvan pituutta kohti. Määritä (infinitesimaaliset) muodonmuutoskomponentit, jotka vaikuttavat pisteessä A: $(y = 0,\ \mathrm{z} = b)$. Määritä päävenymät ja suurin liukuma pisteessä A.



Ratkaisu:

Siirtymät:

$$u = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\theta yz,\ v = -\theta xz,\ w = \theta xy,$$

Muodonmuutokset:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0,\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\theta z - \theta z = -\frac{2a^2}{a^2 + b^2}\theta z,$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\theta x + \theta x = 0,$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\theta y + \theta y = \frac{2b^2}{a^2 + b^2}\theta y,$$

Siis vain liukumat γ_{yz} ja γ_{zx} ovat nollasta eroavia.

Liukumille pisteessä A: $(y = 0,\ \mathrm{z} = b)$ saadaan siis

$$\underline{\underline{\gamma_{xy} = -\frac{2a^2 b}{a^2 + b^2}\theta,\ \gamma_{xz} = 0}}$$

Muut muodonmuutoskomponentit ovat siis nollia. Muodonmuutosmatriisi:

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma_{xy}}{2} & 0 \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{a^2b}{a^2+b^2}\theta & 0 \\ -\frac{a^2b}{a^2+b^2}\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Päävenymät:

$$\det([\varepsilon]-\varepsilon[I])=0 \;\Leftrightarrow\; \begin{vmatrix} -\varepsilon & -\frac{a^2b}{a^2+b^2}\theta & 0 \\ -\frac{a^2b}{a^2+b^2}\theta & -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\; (-\varepsilon)^3-(-\frac{a^2b}{a^2+b^2}\theta)(-\varepsilon)(-\frac{a^2b}{a^2+b^2}\theta)=0 \Rightarrow\; [\varepsilon^2-(\frac{a^2b}{a^2+b^2}\theta)^2]\varepsilon=0$$

$$\Rightarrow\; (\varepsilon-\frac{a^2b}{a^2+b^2}\theta)(\varepsilon+\frac{a^2b}{a^2+b^2}\theta)\varepsilon=0 \Rightarrow\; \varepsilon_1=\frac{a^2b}{a^2+b^2}\theta,\; \varepsilon_2=-\frac{a^2b}{a^2+b^2}\theta,\; \varepsilon_3=0$$

$$\Rightarrow\; \underline{\underline{\varepsilon_I=\frac{a^2b}{a^2+b^2}\theta,\; \varepsilon_{II}=0,\; \varepsilon_{III}=-\frac{a^2b}{a^2+b^2}\theta}}$$

Suurin liukuma:

$$\gamma_{\max}=\varepsilon_I-\varepsilon_{III}=\underline{\underline{\frac{2a^2b}{a^2+b^2}}}\theta.$$

4. Konstitutiiviset yhtälöt

Tehtävä 4.1:

Johda seuraavat kimmovakioiden väliset yhteydet

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

käyttäen hyväksesi seuraavia Hooken lain muotoja

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z), \text{ jne.}, \ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \text{ jne.}$$

$$\sigma_m = K\varepsilon_V; \ \ s_x = 2Ge_x, \text{ jne.}, \ s_{xy} = Ge_{xy}, \text{ jne.}$$

Ratkaisu:

Saadaan

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) + \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_z - \nu\sigma_x) + \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y)$$

$$= \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{3(1-2\nu)}{E}\sigma_m \ \Rightarrow \ \sigma_m = \frac{E}{3(1-2\nu)}\varepsilon_V$$

Toisaalta $\sigma_m = K\varepsilon_V$, joten

$$\underline{\underline{K = \frac{E}{3(1-2\nu)}}}.$$

Deviatorisille venymäkomponentille e_x saadaan

$$e_x = \varepsilon_x - \varepsilon_m = \varepsilon_x - \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

$$= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) - \frac{1}{3}[\frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) + \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_z - \nu\sigma_x) + \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y)]$$

$$= \frac{1+\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - \frac{1-2\nu}{3E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1+\nu}{E}[\sigma_x - \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)]$$

$$= \frac{1+\nu}{E}(\sigma_x - \sigma_m) = \frac{1+\nu}{E}s_x$$

Toisaalta

$$s_x = 2Ge_x \ \Rightarrow \ e_x = \frac{1}{2G}s_x,$$

joten

$$2G = \frac{E}{1+\nu} \ \Rightarrow \ G = \underline{\underline{\frac{E}{2(1+\nu)}}}$$

Tehtävä 4.2:

Tasomuodonmuutostilassa *z*-akselin suuntaiselle siirtymälle pätee $w = 0$ sekä *x*- ja *y*-akselien suuntaiset siirtymät ovat pelkästään *x*:n ja *y*:n funktioita, ts. $u = u(x, y)$ ja $v = v(x, y)$. (a) Osoita, että tasomuodonmuutostilassa muodonmuutoskomponentit ε_z, γ_{yz} ja γ_{zx} häviävät ja muodonmuutoskomponentit ε_x, ε_y ja γ_{xy} ovat pelkästään *x*:n ja *y*:n funktioita. Osoita edelleen, että (b) tasomuodonmuutostilan jännitysten ja muodonmuutosten yhteydet voidaan esittää muodossa $\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\}$ ja muodonmuutosten ja jännitysten yhteydet muodossa $\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\}$, missä

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}.$$

Lausu matriisit $[E]$ ja $[C]$ kimmomoduulin E ja Poissonin luvun ν avulla lausuttuina.

Ratkaisu:

(a) Koska tasomuodonmuutostilassa siirtymille on voimassa $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ ja $w = 0$, muodonmuutoskomponenteille saadaan

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \varepsilon_z = \frac{\partial \overbrace{w}^{0}}{\partial z} = 0,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \ \gamma_{yz} = \frac{\partial \overbrace{w}^{0}}{\partial y} + \overbrace{\frac{\partial v}{\partial z}}^{0} = 0, \ \gamma_{zx} = \overbrace{\frac{\partial u}{\partial z}}^{0} + \frac{\partial \overbrace{w}^{0}}{\partial x} = 0.$$

Koska u ja v ovat pelkästään x:n ja y:n funktioita, ovat ε_x, ε_y ja γ_{xy} näiden derivaattoina myös.

(b) Muodonmuutos-jännitysyhteyksistä saadaan nyt

$$\overbrace{\varepsilon_z}^{0} = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y) \ \Rightarrow \ \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y),$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu^2(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1-\nu^2}{E}\sigma_x - \frac{\nu(1+\nu)}{E}\sigma_y,$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_z - \nu\sigma_x) = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu^2(\sigma_x + \sigma_y) - \nu\sigma_x] = -\frac{\nu(1+\nu)}{E}\sigma_x + \frac{1-\nu^2}{E}\sigma_y,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}.$$

Saatiin siis:

$$\varepsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E}\sigma_x - \frac{\nu(1+\nu)}{E}\sigma_y, \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu(1+\nu)}{E}\sigma_x + \frac{1-\nu^2}{E}\sigma_y, \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}.$$

Matriisimuodossa tämä on

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\},$$

missä

$$[C]=\begin{bmatrix} \dfrac{1-\nu^2}{E} & -\dfrac{\nu(1+\nu)}{E} & 0 \\ -\dfrac{\nu(1+\nu)}{E} & \dfrac{1-\nu^2}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix}.$$

Ratkaistaan σ_x, σ_y ja τ_{xy}:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x-\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}\varepsilon_x, \\ -\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x+\sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}\varepsilon_y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \dfrac{(1-\nu)^2}{1-2\nu}\left(\dfrac{E}{1-\nu^2}\varepsilon_x+\dfrac{\nu}{1-\nu}\dfrac{E}{1-\nu^2}\varepsilon_y\right), \\ \sigma_y = \dfrac{(1-\nu)^2}{1-2\nu}\left(\dfrac{\nu}{1-\nu}\dfrac{E}{1-\nu^2}\varepsilon_x+\dfrac{E}{1-\nu^2}\varepsilon_y\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}\varepsilon_x+\dfrac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}\varepsilon_y, \\ \sigma_y = \dfrac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}\varepsilon_x+\dfrac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}\varepsilon_y. \end{cases}$$

$$\gamma_{xy}=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \Rightarrow \tau_{xy}=\frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}.$$

Saatiin siis

$$\sigma_x=\frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}\varepsilon_x+\frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}\varepsilon_y,$$

$$\sigma_y=\frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}\varepsilon_x+\frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}\varepsilon_y,$$

$$\tau_{xy}=\frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}.$$

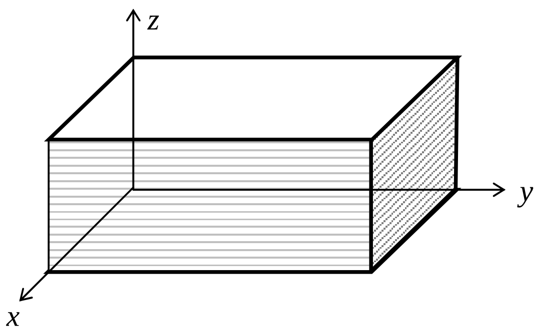
Matriisimuodossa tämä on

$\{\sigma\}=[E]\{\varepsilon\}$,

missä

$$[E]=\begin{bmatrix} \dfrac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \dfrac{E\nu}{(1-2\nu)(1-\nu^2)} & 0 \\ \dfrac{E\nu}{(1-2\nu)(1-\nu^2)} & \dfrac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}.$$

Tehtävä 4.3:



Niin sanottua Transversaali-isotrooppista, lineaarisesti kimmoista materiaalimallia voidaan joissain tilanteissa käyttää kuvaamaan esimerkiksi vanerin tai maan jännitys-muodonmuutoskäyttäytymistä. Kysymyksessä on ortotrooppinen aine, joka on $x, y-$tason suunnassa isotrooppinen. Tämä merkitsee sitä, että aineen $x-$ja $y-$suuntiin liittyvät materiaalivakiot ovat samat. Määritä tällaisen materiaalin muodonmuutos-jännitys yhteys ja tutki riippumattomien kimmovakioiden määrää.

Ratkaisu:

Ortotrooppisen aineen muodonmuutos-jännitys matriisi on

$$[C]=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{E_1} & -\dfrac{\nu_{21}}{E_2} & -\dfrac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\nu_{12}}{E_1} & \dfrac{1}{E_2} & -\dfrac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\nu_{13}}{E_1} & -\dfrac{\nu_{23}}{E_2} & \dfrac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{G_{31}} \end{bmatrix}$$

Kimmovakioita on 12: E_1, E_2, E_3, ν_{12}, ν_{21}, ν_{23}, ν_{32}, ν_{31}, ν_{13}, G_{12}, G_{23} ja G_{31}, ja niitä sitoo 3 symmetriasta johtuvaan yhteyttä

$$\frac{\nu_{12}}{E_1}=\frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_2}=\frac{\nu_{32}}{E_3}, \quad \frac{\nu_{31}}{E_3}=\frac{\nu_{13}}{E_1}.$$

Koska transversaali-isotroopisessa aineessa suunnat 1 ja 2 ovat samanarvoiset, merkitään

$E_2 = E_1,\ \nu_{21} = \nu_{12} = \nu_1,\ \nu_{23} = \nu_{13},\ \nu_{32} = \nu_{31},\ G_{23} = G_{31},$

jolloin muodonmuutos-jännitys matriisille saadaan

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_1}{E_1} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_1}{E_1} & \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} \end{bmatrix}$$

Kimmovakioita on nyt 7 kpl: E_1, E_3, ν_1, ν_{31}, ν_{13}, G_1 ja G_{31}. Niitä sitoo matriisin symmetriasta johtuva ehto

$$\frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}.$$

Isotrooppisuus $x,y-$tasossa edellyttää vielä, että kimmovakioilla E_1, ν_1 ja G_1 on yhteys

$$G_1 = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}.$$

Näin riippumattomia kimmovakioita tehtävässä on $7-2=5\text{kpl}$.

Tehtävä 4.4:

Maamekaniikan tarkasteluissa käytetään usein muodonmuutostilaa, jossa siirtymisen ajatellaan tapahtuvan vain pystysuunnassa. Jos $x, y, z-$koordinaatiston $z-$akseli on pystysuora, tämä merkitsee sitä, että siirtymäkomponentit u ja v häviävät. Niin sanotulla lepopainekerroin K_0 määritellään kertoimena, jonka avulla maan vaaka-suuntaiset normaalijännitykset σ_x ja σ_y saadaan pystysuuntaisen normaali-jännityksen σ_z avulla lausekkeesta

$$\sigma_x = \sigma_y = K_0 \sigma_z \,.$$

Lausu lepopainekerroin kimmovakioiden avulla, kun maa otaksutaan
  (a) isotrooppiseksi lineaarisesti kimmoiseksi aineeksi
  (b) transversaali-isotrooppiseksi lineaarisesti kimmoiseksi aineeksi

Ratkaisu:

Venymille saadaan:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \overbrace{u}^{0}}{\partial x} = 0, \ \varepsilon_y = \frac{\partial \overbrace{v}^{0}}{\partial y} = 0, \ \varepsilon_x = \frac{\partial w}{\partial z} \neq 0$$

(a)
Isotrooppisen, lineaarisesti kimmoisen aineen jännitys-muodonmuutos yhteyksistä seuraa:

$$\sigma_x = (2G + \lambda)\overbrace{\varepsilon_x}^{0} + \lambda \overbrace{\varepsilon_y}^{0} + \lambda\varepsilon_z = \lambda\varepsilon_z \,,$$

$$\sigma_y = (2G + \lambda)\overbrace{\varepsilon_y}^{0} + \lambda\varepsilon_z + \lambda \overbrace{\varepsilon_x}^{0} = \lambda)\varepsilon_z \,,$$

$$\sigma_z = (2G + \lambda)\varepsilon_z + \lambda \overbrace{\varepsilon_x}^{0} + \lambda \overbrace{\varepsilon_y}^{0} = (2G + \lambda)\varepsilon_z \,.$$

Ratkaisemalla viimeisestä ε_z, saadaan

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{2G + \lambda}$$

ja sijoittamalla se kahteen edelliseen saadaan

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\lambda}{2G + \lambda}\sigma_z \,.$$

Vertaamalla tätä määrittelykaavaan $\sigma_x = \sigma_y = K_0\sigma_z$ saadaan

$$\underline{\underline{K_0 = \frac{\lambda}{2G + \lambda}}} \,.$$

Lausumalla Lamen parametri leikkausmoduulin ja Poissonin vakion avulla saadaan tästä

$$K_0 = \frac{\dfrac{2G\nu}{1-2\nu}}{2G + \dfrac{2G\nu}{1-2\nu}} = \frac{2G\nu}{2G(1-2\nu)+2G\nu} = \underline{\underline{\frac{\nu}{1-\nu}}}$$

Vaihtoehtoisesti voidaan lähteä liikkeelle muodonmuutos-jännitysyhteyksistä, jolloin saadaan

$$\left.\begin{aligned} \overbrace{\varepsilon_x}^{0} &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) \\ \overbrace{\varepsilon_y}^{0} &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_z - \nu\sigma_x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x - \nu\sigma_y = \nu\sigma_z \\ -\nu\sigma_x + \sigma_y = \nu\sigma_z \mid \cdot\nu \end{cases} \Rightarrow (1-\nu^2)\sigma_x = (\nu+\nu^2)\sigma_z$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu^2}\sigma_z = \underline{\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z}, \quad \sigma_y = \nu(\sigma_x+\sigma_z) = \nu(\frac{\nu}{1-\nu}+1)\sigma_z = \underline{\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z}$$

Näin

$$K_0 = \underline{\underline{\frac{\nu}{1-\nu}}}$$

(b)

Transversaali-isotrooppisen, lineaarisesti kimmoisen aineen muodonmuutos-jännitys-yhteyksistä seuraa:

$$\left.\begin{aligned} \overbrace{\varepsilon_x}^{0} &= \frac{1}{E_1}\sigma_x - \frac{\nu_1}{E_1}\sigma_y - \frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_z \\ \overbrace{\varepsilon_y}^{0} &= -\frac{\nu}{E_1}\sigma_x + \frac{1}{E_1}\sigma_y - \frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x - \nu_1\sigma_y = \nu_{31}\dfrac{E_1}{E_3}\sigma_z \\ -\nu_1\sigma_x + \sigma_y = \nu_{31}\dfrac{E_1}{E_3}\sigma_z \mid \cdot\nu_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x - \nu_1\sigma_y = \nu_{13}\sigma_z \\ -\nu_1\sigma_x + \sigma_y = \nu_{13}\sigma_z \mid \cdot\nu_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1-\nu_1^2)\sigma_x = \nu_{13}(1+\nu_1)\sigma_z \Rightarrow \sigma_x = \underline{\frac{\nu_{13}}{1-\nu_1}\sigma_z},$$

$$\sigma_y = \nu_1\sigma_x + \nu_{13}\sigma_z = (\nu_1\frac{\nu_{13}}{1-\nu_1} + \nu_{13})\sigma_z = \underline{\frac{\nu_{13}}{1-\nu_1}\sigma_z}$$

Näin

$$K_0 = \underline{\underline{\frac{\nu_{13}}{1-\nu_1}}}$$

Tehtävä 4.5:

Tarkastellaan tasotapausta (tasojännitys- tai tasomuodonmuutostila) ja koordinaatiston muunnosta koordinaatistosta x, y ja koordinaatistoon x', y', missä $x'-$ ja $x-$ akselien välinen kulma on θ. Jännitys- ja muodonmuutoskomponentit käyttäytyminen koordinaatiston kierrossa on edellä esitetty muodossa

$$[\sigma'] = [L][\sigma][L]^T,\ [\sigma] = [L]^T[\sigma'][L],$$
$$[\varepsilon'] = [L][\varepsilon][L]^T,\ [\varepsilon] = [L]^T[\varepsilon'][L]^T.$$

missä

$$[L] = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$$

on koordinaatiston muunnosmatriisi ja on käytetty lyhennysmerkintöjä $c = \cos\theta$ ja $s = \sin\theta$. Nämä yhteydet voidaan myös esittää muodossa

$$\{\sigma'\} = [L_\sigma]\{\sigma\}, \quad \{\varepsilon'\}=[L_\varepsilon]\{\varepsilon\},$$

Muodosta matriisit $[L_\sigma]$ ja $[L_\varepsilon]$ c:n ja s:n avulla lausuttuina. Osoita myös, että näille matriiseille pätee

$$[L_\sigma]^{-1} = [L_\varepsilon]^T, \quad [L_\varepsilon]^{-1} = [L_\sigma]^{\mathrm{T}}.$$

Tarkastellaan sitten jännitys-muodonmuutos yhteyksiä, jotka on esitetty muodossa

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\}, \quad \{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\}.$$

Johda näiden tulosten avulla jännitys-muodonmuutosmatriisille $[E]$ ja muodon-muutos-jännitysmatriisille $[C]$ seuraavat muunnoskaavat

$$[E'] = [L_\sigma][E][L_\sigma]^T, \quad [E] = [L_\varepsilon]^T[E'][L_\varepsilon],$$
$$[C'] = [L_\varepsilon][C][L_\varepsilon]^T, \quad [C] = [L_\sigma]^T[C'][L_\sigma].$$

Ratkaisu:

Kirjoitetaan auki jännityskomponenttien muunnoskaavat:
$$[\sigma'] = [L][\sigma][L]^T$$
$$\Rightarrow$$
$$\begin{bmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} \\ \tau'_{xy} & \sigma'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\sigma_x + s\tau_{xy} & -s\sigma_x + c\tau_{xy} \\ c\tau_{xy} + s\sigma_y & -s\tau_{xy} + c\sigma_y \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} c^2\sigma_x + s^2\sigma_y + 2sc\tau_{xy} & -sc\sigma_x + sc\sigma_y + (c^2 - s^2)\tau_{xy} \\ -sc\sigma_x + sc\sigma_y + (c^2 - s^2)\tau_{xy} & s^2\sigma_x + c^2\sigma_y - 2sc\sigma_y \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \sigma_x' = c^2\sigma_x + s^2\sigma_y + 2sc\tau_{xy}, \\ \sigma_y' = s^2\sigma_x + c^2\sigma_y - 2sc\tau_{xy}, \\ \tau_{xy}' = -sc\sigma_x + sc\sigma_y + (c^2 - s^2)\tau_{xy}. \end{cases}$$

Tämä tulos toisenlaisessa matriisimuodossa on

$\{\sigma'\} = [L_\sigma]\{\sigma\}$,

missä

$$\{\sigma'\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x' \\ \sigma_y' \\ \tau_{xy}' \end{Bmatrix}, \ \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

ja

$$\underline{\underline{[L_\sigma] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix}}}$$

Kirjoitetaan auki muodonmuutoskomponenttien muunnoskaavat:

$[\varepsilon'] = [L][\varepsilon][L]^T$

$\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x' & \dfrac{\gamma_{xy}'}{2} \\ \dfrac{\gamma_{xy}'}{2} & \varepsilon_y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \dfrac{\gamma_{xy}}{2} \\ \dfrac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\sigma_x + s\tau_{xy} & -s\sigma_x + c\tau_{xy} \\ c\tau_{xy} + s\sigma_y & -s\tau_{xy} + c\sigma_y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c^2\varepsilon_x + s^2\varepsilon_y + sc\gamma_{xy} & -sc\varepsilon_x + sc\varepsilon_y + \dfrac{c^2 - s^2}{2}\gamma_{xy} \\ -sc\varepsilon_x + sc\varepsilon_y + \dfrac{c^2 - s^2}{2}\gamma_{xy} & s^2\varepsilon_x + c^2\varepsilon_y - sc\gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \varepsilon_x' = c^2\varepsilon_x + s^2\varepsilon_y + sc\gamma_{xy}, \\ \varepsilon_y' = s^2\varepsilon_x + c^2\varepsilon_y - sc\gamma_{xy}, \\ \gamma_{xy}' = -2sc\varepsilon_x + 2sc\varepsilon_y + (c^2 - s^2)\gamma_{xy}. \end{cases}$$

Tämä tulos toisenlaisessa matriisimuodossa on

$\{\sigma'\} = [L_\varepsilon]\{\sigma\}$,

missä

$$\{\varepsilon'\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x' \\ \varepsilon_y' \\ \gamma_{xy}' \end{Bmatrix}, \ \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

ja

$$\underline{\underline{[L_\varepsilon] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix}}}$$

Määritetään matriisitulo

$$[L_\sigma]^T [L_\varepsilon] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -cs \\ s^2 & c^2 & cs \\ 2cs & -2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} c^4 + s^4 + 2c^2s^2 & c^2s^2 + s^2c^2 - 2c^2s^2 & c^3s - cs^3 - c^3s + cs^3 \\ s^2c^2 + c^2s^2 - 2c^2s^2 & c^4 + s^4 + 2c^2s^2 & cs^3 - c^3s + c^3s - cs^3 \\ 2c^3s - 2cs^3 - 2c^3s + 2cs^3 & 2cs^3 - 2c^3s + 2c^3s - 2cs^3 & 4c^2s^2 + (c^2 - s^2)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (c^2 + s^2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (c^2 + s^2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (c^2 + s^2)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\underline{[L_\sigma]^T [L_\varepsilon] = [I]} \;\Rightarrow\; ([L_\sigma]^T [L_\varepsilon])^T = [I] \;\Rightarrow\; \underline{[L_\varepsilon]^T [L_\sigma] = [I]}$$

Alleviivattujen yhtälöiden perusteella nähdään:

$$\underline{\underline{[L_\varepsilon]^{-1} = [L_\sigma]^T}}, \quad \underline{\underline{[L_\sigma]^{-1} = [L_\varepsilon]^T}}$$

Nyt saadaan

$$\{\sigma'\} = [L_\sigma]\{\sigma\} = [L_\sigma][E]\{\varepsilon\} = [L_\sigma][C][L_\varepsilon]^{-1}\{\varepsilon'\} = \underbrace{[L_\sigma][E][L_\sigma]^T}_{[E']}\{\varepsilon'\},$$

$$\{\sigma\} = ([L_\sigma])^{-1}\{\sigma'\} = [L_\varepsilon]^T\{\sigma'\} = [L_\varepsilon]^T[E']\{\varepsilon'\} = \underbrace{[L_\varepsilon]^T[E'][L_\varepsilon]}_{[E']}\{\varepsilon\},$$

$$\{\varepsilon'\} = [L_\varepsilon]\{\varepsilon\} = [L_\varepsilon][C]\{\sigma\} = [L_\varepsilon][C][L_\sigma]^{-1}\{\sigma'\} = \underbrace{[L_\varepsilon][C][L_\varepsilon]^T}_{[C']}\{\sigma'\},$$

$$\{\varepsilon\} = ([L_\varepsilon])^{-1}\{\bar{\varepsilon}\} = [L_\sigma]^T\{\bar{\varepsilon}\} = [L_\sigma]^T[C']\{\sigma'\} = \underbrace{[L_\sigma]^T[C'][L_\sigma]}_{[C]}\{\sigma\}.$$

Näistä nähdään, että

$$\underline{\underline{[E'] = [L_\sigma][E][L_\sigma]^T}}, \quad \underline{\underline{[E] = [L_\varepsilon]^T[E'][L_\varepsilon]}},$$

$$\underline{\underline{[C'] = [L_\varepsilon][C][L_\varepsilon]^T}}, \quad \underline{\underline{[C] = [L_\sigma]^T[C']L_\sigma]}}.$$

Tehtävä 4.6:

Tarkastellaan materiaalia, jonka muodonmuutos-jännitysmatriisi tasojännitystilassa, sopivasti valitussa $x, y-$ koordinaatistossa on

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}.$$

Tässä muodonmuutos-jännityslaissa on siis kolme parametria E, ν ja G. Määritä edellisen tehtävän tuloksen perusteella muodonmuutos-jännitysmatriisi $[C']$ koordinaatistossa x', y', jonka $x'-$ ja $x-$akselin välinen kulma on θ. Millä ehdolla $[C'] = [C]$ eli materiaali on isotrooppista?

Ratkaisu:

Nyt on

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}, \quad [L_\varepsilon] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}.$$

Muodonmuutos-jännitysmatriisille muunnetussa koordinaatistossa saadaan

$$[C'] = [L_\varepsilon][C][L_\varepsilon]^T = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 2cs \\ cs & -cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{E}c^2 - \frac{\nu}{E}s^2 & \frac{1}{E}s^2 - \frac{\nu}{E}c^2 & -\frac{2(1+\nu)}{E}cs \\ \frac{1}{E}s^2 - \frac{\nu}{E}c^2 & \frac{1}{E}c^2 - \frac{\nu}{E}s^2 & \frac{2(1+\nu)}{E}cs \\ \frac{1}{G}cs & -\frac{1}{G}cs & \frac{1}{G}(c^2 - s^2) \end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix}
\frac{1}{E}(c^4+s^4)-2\frac{\nu}{E}c^2s^2+\frac{1}{G}c^2s^2 & \frac{2}{E}c^2s^2-\frac{\nu}{E}(c^4+s^4)-\frac{1}{G}c^2s^2 & [-\frac{2(1+\nu)}{E}+\frac{1}{G}]cs(c^2-s^2) \\
\frac{2}{E}c^2s^2-\frac{\nu}{E}(c^4+s^4)-\frac{1}{G}c^2s^2 & \frac{1}{E}(c^4+s^4)-2\frac{\nu}{E}c^2s^2+\frac{1}{G}c^2s^2 & [\frac{2(1+\nu)}{E}-\frac{1}{G}]cs(c^2-s^2) \\
[-\frac{2(1+\nu)}{E}+\frac{1}{G}]cs(c^2-s^2) & [\frac{2(1+\nu)}{E}-\frac{1}{G}]cs(c^2-s^2) & \frac{8(1+\nu)}{E}c^2s^2+\frac{1}{G}(c^2-s^2)^2
\end{bmatrix}
$$

Muodostetaan välillä yhteydet

$c^4+s^4=c^4+s^4+2c^2s^2-2c^2s^2=(c^2+s^2)^2-2c^2s^2=1-2c^2s^2$,

$(c^2-s^2)^2=c^4+s^4-2c^2s^2=c^4+s^4+2c^2s^2-4c^2s^2=(c^2+s^2)^2-4c^2s^2=1-4c^2s^2$,

joiden aikaansaamisessa käytettiin hyväksi yhteyttä $c^2+s^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$. Nyt saadaan tulos

$$
[C']=\begin{bmatrix}
\frac{1}{E}+[-\frac{2(1+\nu)}{E}+\frac{1}{G}]c^2s^2 & -\frac{\nu}{E}+[\frac{2(1+\nu)}{E}-\frac{1}{G}]c^2s^2 & [-\frac{2(1+\nu)}{E}+\frac{1}{G}]cs(c^2-s^2) \\
-\frac{\nu}{E}+[\frac{2(1+\nu)}{E}-\frac{1}{G}]c^2s^2 & \frac{1}{E}+[-\frac{2(1+\nu)}{E}+\frac{1}{G}]c^2s^2 & [\frac{2(1+\nu)}{E}-\frac{1}{G}]cs(c^2-s^2) \\
[-\frac{2(1+\nu)}{E}+\frac{1}{G}]cs(c^2-s^2) & [\frac{2(1+\nu)}{E}-\frac{1}{G}]cs(c^2-s^2) & \frac{1}{G}+4[\frac{2(1+\nu)}{E}-\frac{1}{G}]c^2s^2
\end{bmatrix}
$$

Jos nyt

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)},$$

niin

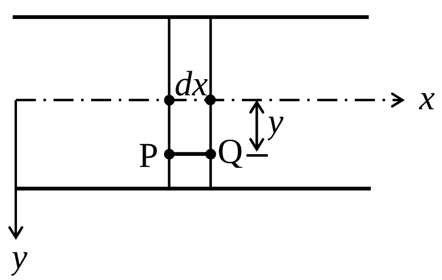
$$
[C']=\begin{bmatrix}
\frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\
-\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{G}
\end{bmatrix}=[C]
$$

ja materiaali on siten isotrooppista.

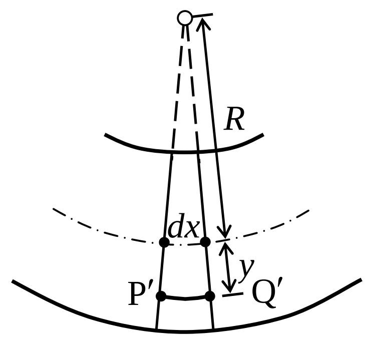
Tehtävä 4.7:

Kimmoista suoraa sauvaa, jonka akseli yhtyy x-akseliin, taivutetaan $x, y-$tasossa siten, että akselista tulee R-säteinen ympyrän kaari. Koska kysymyksessä on hoikka sauva, voidaan sen jännityskomponenteille otaksua $\sigma_x \neq 0$ ja $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$. (a) Määritä venymä ε_x koordinaatin y funktiona otaksumalla se kuvan jana-alkion PQ suhteelliseksi pituudenmuutokseksi. (b) Määritä jännitys σ_x sekä venymät ε_y ja ε_z. (c) Määritä myös liukumat γ_{xy}, γ_{yz} ja γ_{zx}.

Alkutila:



Lopputila:



Ratkaisu:

(a) Janojen PQ ja $\mathrm{P'Q'}$ pituudet:

$$\mathrm{PQ} = dx,\quad \frac{\mathrm{P'Q'}}{dx} = \frac{R+y}{R} \;\Rightarrow\; \mathrm{P'Q'} = \frac{R+y}{R}dx = (1+\frac{y}{R})dx$$

Venymä ε_x:

$$\varepsilon_x = \frac{\mathrm{P'Q'}-\mathrm{PQ}}{\mathrm{PQ}} = \frac{(1+\frac{y}{R})dx - dx}{dx} = \underline{\underline{\frac{y}{R}}}$$

(b)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\overbrace{\sigma_y}^{0} - \nu\overbrace{\sigma_z}^{0}) = \frac{\sigma_x}{E} \;\Rightarrow\; \sigma_x = E\varepsilon_x = \underline{\underline{\frac{Ey}{R}}}.$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\overbrace{\sigma_y}^{0} - \nu\overbrace{\sigma_z}^{0} - \nu\sigma_x) = -\frac{\nu\sigma_x}{E} = \underline{\underline{-\frac{\nu y}{R}}},$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\overbrace{\sigma_z}^{0} - \nu\sigma_x - \nu\overbrace{\sigma_y}^{0}) = -\frac{\nu\sigma_x}{E} = \underline{\underline{-\frac{\nu y}{R}}}.$$

(c)

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\overbrace{\tau_{xy}}^{0} = \underline{\underline{0}},\; \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\overbrace{\tau_{yz}}^{0} = \underline{\underline{0}},\; \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\overbrace{\tau_{zx}}^{0} = \underline{\underline{0}}.$$

Tehtävä 4.8:

Maakerrosten painuma-analyysin yhteydessä käytetään ns. ödometrikoetta. Siinä sylinterimäisessä rasiassa olevaa näytettä kuormitetaan sylinterin akselin (z-akseli) suunnassa. Näyte deformoituu siten, että pelkästään z-akselin suuntainen liike on mahdollinen. Likitarkastelussa rasian ja näytteen välinen kitka sekä näytteen oma paino voidaan jättää huomiotta. Näytteen siirtymätila on siis: $u = v = 0,\ w = w(z)$.

(a) Osoita käyttäen muodonmuutosten ja siirtymien välisiä yhteyksiä, että venymä ε_z on ainoa nollasta eroava muodonmuutoskomponentti ja sillä on lauseke $\varepsilon_z = w'(z)$.

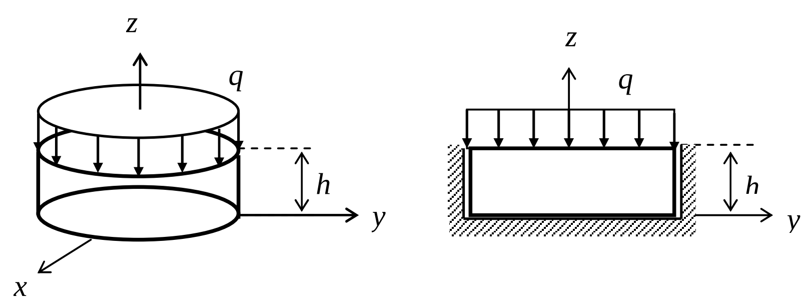
(b) Otaksutaan, että maanäyte on isotrooppista ja lineaarisesti kimmoista materiaalia. Osoita lähtien Hooken laista, että tässä tapauksessa maanäytteen venymän ε_z ja vastaavan normaalijännityksen σ_z välinen yhteys voidaan kirjoittaan muotoon

$$\varepsilon_z = \frac{1-\nu-2\nu^2}{(1-\nu)E}\sigma_z$$

ja maanäytteen muille normaalijännityksille saadaan lauseke

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z$$

(c) Sylinterimäisen näytteen ympyrän muotoista yläpintaa kuormittaa pintayksikköä kohti tasan jakautunut kuormitus q. Katkaistun sylinterin yläosan tasapaino-tarkastelulla, nähdään helposti, että maanäytteen normaalijännityksellä σ_z on tässä tapauksessa arvo $\sigma_z = -q$. Käyttäen tätä tulosta sekä tietoa, että näytteen venymä ε_z on sen suhteellinen korkeuden muutos, ts. $\varepsilon_z = \Delta h / h$, muodosta lauseke näytteen kuormituksesta q aiheutuvalle korkeuden muutokselle Δh.



Ratkaisu:

(a) Muodonmuutoksille saadaan:

$$\varepsilon_x = \frac{\overbrace{\partial u}^{0}}{\partial x} = 0, \quad \gamma_{xy} = \frac{\overbrace{\partial u}^{0}}{\partial y} + \frac{\overbrace{\partial v}^{0}}{\partial x} = 0,$$

$$\varepsilon_y = \frac{\overbrace{\partial v}^{0}}{\partial y} = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\overbrace{\partial v}^{0}}{\partial z} + \frac{\overbrace{\partial w}^{0}}{\partial y} = 0,$$

$$\varepsilon_z = \frac{\overbrace{\partial w}^{\frac{dw}{dz}}}{\partial z} = w'(z), \quad \gamma_{zx} = \frac{\overbrace{\partial w}^{0}}{\partial x} + \frac{\overbrace{\partial u}^{0}}{\partial z} = 0,$$

joten

$$\underline{\underline{\varepsilon_z = w'(z).}}$$

(b) Hooken laista ja edellisistä tuloksista saadaan:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) = 0, \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_z - \nu\sigma_x) = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x - \nu\sigma_y = \nu\sigma_z, \\ \sigma_y - \nu\sigma_x = \nu\sigma_z, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-\nu)(\sigma_x + \sigma_y) = 2\nu\sigma_z, \\ (\sigma_x - \sigma_y)(1+\nu) = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x + \sigma_y = \dfrac{2\nu}{1-\nu} 2\nu\sigma_z, \\ \sigma_x = \sigma_y, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\nu}{1-\nu}\sigma_z, \\ \sigma_y = \dfrac{\nu}{1-\nu}\sigma_z. \end{cases}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y) = \frac{1}{E}(\sigma_z - \frac{\nu^2}{1-\nu}\sigma_z - \frac{\nu^2}{1-\nu}\sigma_z)$$

$$= \frac{1}{E}(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu})\sigma_z = \underline{\underline{\frac{1-\nu-2\nu^2}{(1-\nu)E}}}\sigma_z.$$

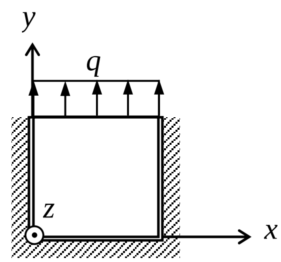
(c) Saadaan

$$\sigma_z = -q.$$

(d) Saadaan

$$\frac{\Delta h}{h} = \varepsilon_z = \frac{1-\nu-2\nu^2}{(1-\nu)E}\overbrace{\sigma_z}^{-q} \Rightarrow \underline{\underline{\Delta h = -\frac{1-\nu-2\nu^2}{(1-\nu)E}qh.}}$$

Tehtävä 4.9:



Tarkastellaan ohutta, suorakaiteen muotoista levyä *x,y*-tasossa (vrt. kuva). Levy on tasojännitystilassa, joten $\sigma_z = 0.$ Se tukeutuu alareunaltaan ja pystysuorilta sivuiltaan kitkattomasti liikkumattomaan tukeen. Tämän johdosta levyn muodonmuutoskomponenteille pätee: $\varepsilon_x = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = 0$. Tasapainoehdon perusteella $\sigma_y = q$, missä q on levyn yläreunaa kuormittava pintayksikköä kohti tasan jakautunut kuorma. Määritä (a) levyn venymä ε_y ja jännitys σ_x kuorman *q*, kimmomoduulin *E* ja Poissonin vakion ν avulla lausuttuina. Määritä myös (b) levyn pystysuora siirtymä *v* koordinaatin *y* funktiona käyttäen hyväksi muodonmuutos-siirtymäyhteyttä $\varepsilon_y = \partial v / \partial y$.

Ratkaisu:

(a) Hooken laki:

$$\begin{cases} \overbrace{\varepsilon_x}^{0} = \dfrac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\overbrace{\sigma_z}^{0}) \;\Rightarrow\; \sigma_x = \nu\sigma_y \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}(\sigma_y - \nu\overbrace{\sigma_z}^{0} - \nu\sigma_x) \;\Rightarrow\; \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}(\sigma_y - \nu\overbrace{\sigma_x}^{\nu\sigma_y}) \;\Rightarrow\; \varepsilon_y = \dfrac{1-\nu^2}{E}\sigma_y. \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon_y = \frac{1-\nu^2}{E}q,\;\; \sigma_x = \nu q.}}$$

(b) Differentiaaliyhtälö:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1-\nu^2}{E}q, \;\Rightarrow\; v = \frac{1-\nu^2}{E}qy + f(x).$$

Symmetrian vuoksi *v* ei voi riippua *x*:stä, joten voimme merkitä $f(x) = C$ ja

$$v = \frac{1-\nu^2}{E}qy + C.$$

Reunaehto:

$$v(0) \equiv 0 + C = 0 \;\Rightarrow\; C = 0.$$

Siirtymä:

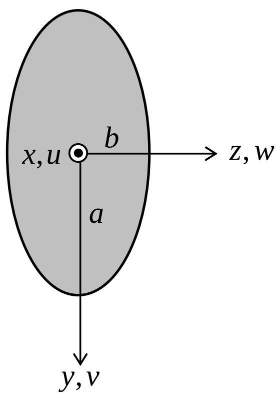
$$\underline{\underline{v(y) = \frac{1-\nu^2}{E}qy.}}$$

Tehtävä 4.10:

Terässauvan, jonka poikkileikkaus on ellipsin muotoinen, siirtymille on saatu lausekkeet

$$u = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\theta yz,\ v = -\theta xz,\ w = \theta xy,$$

missä θ on ns. vääntymä eli vääntökulma sauvan pituutta kohti. Määritä (a) sauvan muodonmuutokset ja jännitykset sekä osoita, että jännityskomponenttien tasapainoehdot toteutuvat. (b) Määritä sauvan suurin leikkausjännitys ja piste, jossa se vaikuttaa, jos $a \geq b$.



Ratkaisu:

(a)
Siirtymät:

$$u = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\theta yz,\ v = -\theta xz,\ w = \theta xy,$$

Muodonmuutokset:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0,\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\theta z - \theta z = -\frac{2a^2}{a^2 + b^2}\theta z,$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\theta x + \theta x = 0,$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\theta y + \theta y = \frac{2b^2}{a^2 + b^2}\theta y,$$

Siis vain liukumat γ_{xy} ja γ_{xz} ovat nollasta eroavia.

Leikkausjännitykset:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = -\frac{2Ga^2}{a^2 + b^2}\theta z,$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = \frac{2Gb^2}{a^2 + b^2}\theta y.$$

Muut jännitykset ovat nollia.

Sijoittamalla jännitykset jännityskomponenttien tasapainoyhtälöihin, joissa $f_x = f_y = f_z = 0$, saadaan

$$\frac{\partial \overbrace{\sigma_x}^{0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}(-\frac{2Ga^2}{a^2+b^2}\theta z) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{2Gb^2}{a^2+b^2}\theta y) = 0, \text{ OK}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \overbrace{\sigma_y}^{0}}{\partial y} + \frac{\partial \overbrace{\tau_{yz}}^{0}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(-\frac{2Ga^2}{a^2+b^2}\theta z) = 0, \text{ OK}$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \overbrace{\tau_{yz}}^{0}}{\partial y} + \frac{\partial \overbrace{\sigma_z}^{0}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{2Gb^2}{a^2+b^2}\theta y) = 0, \text{ OK}$$

Leikkausjännityksen τ_{xy} itseisarvoltaan suurin arvo saadaan, kun $y = 0$ ja $z = \pm b$. Se ja sitä vastaava τ_{xz} ovat

$$\tau_{xy}(0, \pm b) = \pm\frac{2Ga^2 b}{a^2+b^2}\theta, \quad \tau_{xz} = 0.$$

Näin leikkausjännityksen suuruus tässä pisteessä on

$$\tau(0, \pm b) = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{2Ga^2 b}{a^2+b^2}\theta = \underline{\frac{2G}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}\theta a}$$

Leikkausjännityksen τ_{xz} itseisarvoltaan suurin arvo saadaan, kun $y = \pm a$ ja $z = 0$. Se ja sitä vastaava τ_{xz} ovat

$$\tau_{xy}(\pm a, 0) = 0, \quad \tau_{xz}(\pm a, 0) = \pm\frac{2Gab^2}{a^2+b^2}\theta$$

Näin leikkausjännityksen suuruus tässä pisteessä on

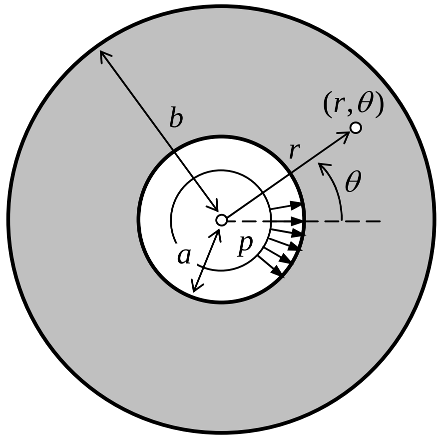
$$\tau(\pm a, 0) = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{2Gab^2}{a^2+b^2}\theta = \underline{\frac{2Gab}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}\theta b}$$

Jos $a > b$ edellinen leikkausjännitys on suurempi ja jos $a = b$ nämä ovat yhtä suuria. Näin olemme saaneet tuloksen, että ellipsin muotoisen poikkileikkauksen, jonka $a \geq b$, suurin leikkausjännityksen arvo on

$$\underline{\underline{\tau_{\max} = \frac{2G}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}\theta a}}$$

ja se saavutetaan pisteissä $y = 0,\ z = \mp b.$

Tehtävä 4.11:



Tarkastallaan putkea, jonka sisäsäde on a ja ulkosäde on b. Sen materiaali on lineaarisesti kimmoista, kimmomoduuli on E ja Poissonin vakio on ν. Putken sisällä vaikuttaa vakio paine p, mutta muuten se on kuormittamaton. Putki on tuettu siten että sen pitenemistä pitkittäissuunnassa ei ole rajoitettu, joten sen voidaan olettaa olevan tasojännitystilassa ja tarkastelu rajoittaa poikkileikkaustasoon. On tarkoituksen mukaista tarkastella putkea sylinteri-koordinaatistossa, jonka $z-$akseli yhtyy putken akseliin. Putken ja kuormituksen symmetrian vuoksi säteen suuntainen siirtymä u_r on pelkästään r:n funktio ja tangentin suutainen siirtymä u_θ häviää. (a) Lausu ensin käyttäen muodonmuutosten ja siirtymien yhteyksiä venymät ε_r, ε_θ ja liukuma $\gamma_{r\theta}$ siirtymän u_r avulla. (b) Lausu toiseksi käyttäen tasojännitystilan jännitysten ja muodonmuutosten yhteyksiä[1] jännitykset σ_r, σ_θ ja $\tau_{r\theta}$ siirtymän avulla. (c) Sijoittamalla nämä ensimmäiseen jännityskomponenttien tasapainoyhtälöön, jolloin saat siirtymälle $u_r(r)$ differentiaaliyhtälön ja saata tämä yhtälö muotoon

$$\frac{d}{dr}[\frac{1}{r}\frac{d(ru_r)}{dr}]=0\,.$$

(d) Osoita, että tämän differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on

$$u_r(r)=\frac{C_1}{2}r+\frac{C_2}{r}.$$

(e) Reunaehdot putken sisä- ja ulkopinnalla ovat

$$\sigma_r(a)=p,\ \sigma_r(b)=0.$$

Määritä reunaehtojen avulla integrointivakioiden C_1 ja C_2 arvot ja osoita, että levyn siirtymällä u_r ja jännityksillä σ_r ja σ_θ on lausekkeet

$$u_r=\frac{p}{E}\frac{a^2b}{b^2-a^2}[(1-\nu)\frac{r}{b}+(1+\nu)\frac{b}{r}]\,,$$

---

[1] Jännitysten ja muodonmuutosten yhteydet sylinterikoordinaatistossa ovat samanlaiset kuin karteesisessa koordinaatistossa. Ne saadaan siis jälkimmäisistä suorittamalla alaindekseille sijoitukset: $x\to r,\ y\to\theta,\ z\to z$.

$$\sigma_r = \frac{pa^2}{b^2 - a^2}(1 - \frac{b^2}{r^2}), \quad \sigma_\theta = \frac{pa^2}{b^2 - a^2}(1 + \frac{b^2}{r^2}).$$

(f) Piirrä lopuksi tapauksessa, jossa $b = 3a$ ja $\nu = 0,3$, levyn dimensioton siirtymä $Eu_r /(pa)$ sekä dimensiottomat jännitykset σ_r / p ja σ_θ / p suhteen r / a funktiona.

Ratkaisu:

(a) Kun $u_r(r)$, $u_\theta = 0$, muodonmuutosten ja siirtymien yhteyksistä saadaan venymille $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ ja liukumalle $\gamma_{r\theta}$ lausekkeet

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \underline{\underline{\frac{du_r}{dr}}},$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \overbrace{u_\theta}^{0}}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} = \underline{\underline{\frac{u_r}{r}}},$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial \overbrace{u_\theta}^{0}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\overbrace{\partial u_r}^{0}}{\partial \theta} - \frac{\overbrace{u_\theta}^{0}}{r} = \underline{\underline{0}}.$$

(b) Tasojännitystilan jännitysten ja muodonmuutosten yhteyksistä karteesisessa koordinaatistossa saadaan sijoituksilla $x \to r$ ja $y \to \theta$ vastaaviksi yhteyksiksi sylinterikoordinaatistossa

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta), \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r), \quad \tau_{r\theta} = G\gamma_{r\theta} \equiv \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{r\theta}.$$

Nyt saadaan jännityksille

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta) = \dfrac{E}{1-\nu^2}(\dfrac{du_r}{dr} + \nu\dfrac{u_r}{r}), \\ \sigma_\theta = \dfrac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r) = \dfrac{E}{1-\nu^2}(\dfrac{u_r}{r} + \nu\dfrac{du_r}{dr}), \\ \tau_{r\theta} = \dfrac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{r\theta} = 0. \end{cases}$$

Näin ainoiksi nollasta eroaviksi jännityskomponenteiksi jäävät σ_r ja σ_θ ja ne ovat pelkästään r:n funktoita. (c) Ensimmäisestä jännityskomponenttien tasapainoyhtälöstä saadaan

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \overbrace{\tau_{\theta r}}^{0}}{\partial \theta} + \frac{\partial \overbrace{\tau_{zr}}^{0}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + \overbrace{f}^{0}_{r} = 0,$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta)_r = 0$$

Sijoittamalla siihen jännitysten lausekkeet saadaan

$$\frac{d}{dr}[\frac{E}{1-\nu^2}(\frac{du_r}{dr}+\nu\frac{u_r}{r})]+\frac{1}{r}\frac{E}{1-\nu^2}(\frac{du_r}{dr}+\nu\frac{u_r}{r}-\frac{u_r}{r}-\nu\frac{du_r}{dr})=0$$

$$\Rightarrow\quad \frac{E}{1-\nu^2}[\frac{d^2u_r}{dr^2}+\nu\frac{d}{dr}(\frac{u_r}{r})+\frac{1}{r}(1-\nu)(\frac{du_r}{dr}-\frac{u_r}{r})]=0$$

$$\Rightarrow\quad \frac{E}{1-\nu^2}(\frac{d^2u_r}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du_r}{dr}-\frac{u_r}{r^2})=0$$

$$\Rightarrow\quad \frac{d^2u_r}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du_r}{dr}-\frac{u_r}{r^2}=0.$$

Soveltamalla tulon derivointia tehtäväpaperissa annetun yhtälön vasempaan puoleen nähdään

$$\frac{d}{dr}[\frac{1}{r}\frac{d(ru_r)}{dr}]=\frac{d}{dr}(\frac{du_r}{dr}+\frac{1}{r}u_r)=\frac{d^2u_r}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du_r}{dr}-\frac{u_r}{r^2},$$

joten siirtymän u_r differentiaaliyhtälö voidaan esittää myös muodossa

$$\underline{\underline{\frac{d}{dr}[\frac{1}{r}\frac{d(ru_r)}{dr}]=0.}}$$

(e) Ratkaistaan tämä yhtälö seuraavasti

$$\frac{d}{dr}[\frac{1}{r}\frac{d(ru_r)}{dr}]=0\ \Rightarrow\ \frac{1}{r}\frac{d(ru_r)}{dr}=C_1\ \Rightarrow\ \frac{d(ru_r)}{dr}=C_1r$$

$$\Rightarrow\ ru_r=\frac{C_1}{2}r^2+C_2\Rightarrow\ \underline{\underline{u_r=\frac{C_1}{2}r+\frac{C_2}{r}.}}$$

(e) Määritetään jännitykset interointivakioiden avulla:

$$\sigma_r=\frac{E}{1-\nu^2}(\frac{du_r}{dr}+\nu\frac{u_r}{r})=\frac{E}{1-\nu^2}(\frac{C_1}{2}-\frac{C_2}{r^2}+\nu\frac{C_1}{2}+\nu\frac{C_2}{r^2})=\frac{E}{1-\nu^2}[(1+\nu)\frac{C_1}{2}-(1-\nu)\frac{C_2}{r^2}],$$

$$\sigma_\theta=\frac{E}{1-\nu^2}(\frac{u_r}{r}+\nu\frac{du_r}{dr})=\frac{E}{1-\nu^2}(\frac{C_1}{2}+\frac{C_2}{r^2}+\nu\frac{C_1}{2}-\nu\frac{C_2}{r^2})=\frac{E}{1-\nu^2}[(1+\nu)\frac{C_1}{2}+(1-\nu)\frac{C_2}{r^2}].$$

((f) Reunaehdot ovat:

$$\sigma_r(a)=-p,\ \sigma_r(b)=0.$$

Niistä seuraa integrointivakioille:

$$\begin{cases}\sigma_r(a)\equiv\dfrac{E}{1-\nu^2}[(1+\nu)\dfrac{C_1}{2}-(1-\nu)\dfrac{C_2}{a^2}]=-p,\\ \sigma_r(b)\equiv\dfrac{E}{1-\nu^2}[(1+\nu)\dfrac{C_1}{2}-(1-\nu)\dfrac{C_2}{b^2}]=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(1+\nu)\dfrac{C_1}{2}-(1-\nu)\dfrac{C_2}{a^2}=-\dfrac{p(1-\nu^2)}{E},\\ (1+\nu)\dfrac{C_1}{2}-(1-\nu)\dfrac{C_2}{b^2}=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}C_1=2\dfrac{1-\nu}{1+\nu}\dfrac{C_2}{b^2}\\ \dfrac{a^2-b^2}{a^2b^2}(1-\nu)C_2=-\dfrac{p(1-\nu^2)}{E}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=\dfrac{2a^2}{b^2-a^2}\dfrac{p(1-\nu)}{E},\\ C_2=\dfrac{a^2b^2}{b^2-a^2}\dfrac{p(1+\nu)}{E}.\end{cases}$$

Nyt sadaan siirtymälle

$$u_r=\frac{C_1}{2}r+\frac{C_2}{r}=\underline{\underline{\frac{p}{E}\frac{a^2b}{b^2-a^2}[(1-\nu)\frac{r}{b}+(1+\nu)\frac{b}{r}].}}$$

ja jännityksille

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}[(1+\nu)\frac{C_1}{2} - (1-\nu)\frac{C_2}{r^2}] = \underline{\underline{\frac{pa^2}{b^2-a^2}(1-\frac{b^2}{r^2})}},$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}[(1+\nu)\frac{C_1}{2} + (1-\nu)\frac{C_2}{r^2}] = \underline{\underline{\frac{pa^2}{b^2-a^2}(1+\frac{b^2}{r^2})}}.$$

(f) Sijoittamalla $b = 3a$ ja $\nu = 0,3$ saadaan

$$\frac{Eu_r}{pa} = \frac{1}{8}(0,7\frac{r}{a} + 11,7\frac{a}{r}),\quad \frac{\sigma_r}{p} = \frac{1}{8}(1-9\frac{a^2}{r^2}),\quad \frac{\sigma_\theta}{p} = \frac{1}{8}(1+9\frac{a^2}{r^2}).$$

Näiden kaavojen avulla voidaan kuvaajat helposti piirtää.